CAPÍTULO V
ANUALIDADES

5.1.- ANUALIDADES

Definición: Se refiere a una serie de flujos normalmente de un mismo monto y períodos iguales. Pueden ser abonos o pagos y lo más importante, no necesariamente deben ser de periodicidad anual, sino mensual, quincenal, bimestral etc.

Al tiempo que transcurre entre un pago (o abono) y otro, se refiere al intervalo de pago o intervalo de abono según sea el caso que se desee calcular. Y el tiempo del contrato o convenio, se refiere al plazo de la anualidad, esto es, el rango de tiempo que transcurre entre el primer y último de los pagos o abonos

De tal forma, podríamos entender a la Anualidad o Renta: como el pago periódico que se realiza en un lapso de tiempo, considerando una tasa de interés y una capitalización en cuyo caso se fija al inicio de la firma del convenio.

Un ejemplo clásico de convenio es cuando adquirimos un automóvil, aquí ya sabemos cuándo principia y cuándo termina el plazo que nos dan para liquidar nuestro auto.

¿No es así?

Tipos: En la literatura se pueden encontrar diversas clasificaciones de anualidades, pero centremos el tema en la siguiente clasificación:

- Ordinarias o Vencidas
- Anticipadas
- Diferidas
- Generales

5.1.1.- ORDINARIAS 

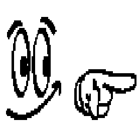
Son aquellas anualidades que son utilizadas con mayor frecuencia en la actividad financiera y comercial. También son conocidas como anualidades ciertas, simples e inmediatas.

Las características de éste tipo de anualidades son:

- Los pagos o abonos se realizan al final de cada intervalo de pago
- Se conoce desde la firma del convenio, las fechas de inicio y término del plazo de la anualidad
- Las capitalizaciones coinciden con el intervalo de pago
- El plazo inicia con la firma del convenio

5.1.1.1.- Variables que se utilizan en este apartado:

VPN: Valor Presente Neto (de un conjunto de pagos o abonos)
VF ó M: Valor Futuro o Monto (de la suma de unos pagos o abonos)
A ó Rp: Anualidad o Renta periódica (cuota uniforme o anualidad)
m: Capitalización (por su tipo de capitalización, mensual, bimestral etc., la tasa se divide entre el tipo de capitalización. Ejemplo si tenemos una tasa nominal del 12% capitalizable mensualmente entonces es = (12%/12)
i: Tasa de Interés (la tasa que integra el factor de acumulación o descuento $1+i$)
n: Tiempo



ACLARACION: Para no generar confusión en lo referente a la tasa, la representación *i/m,* se refiere a la tasa nominal que se divide entre el número de meses dependiendo la capitalización. Ejemplo si nos dan una tasa del 12% nominal (anual) capitalizable mensualmente, sabemos que debemos dividir 12/12=1% **POR LO ANTERIOR** el lector podrá encontrar indistintamente la tasa en su forma *i ó* **en su forma** *i/m.*

5.1.1.2.- Procedimiento:

Para calcular el monto de una serie de pagos, el pago periódico, la tasa y el tiempo, utilizaremos las siguientes fórmulas:

Su monto: $$VF = Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m} \quad \text{ó} \quad M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$$

Cuando las tasas de interés cambian en el lapso del tiempo, se buscará el VF de la anualidad de la siguiente forma:

> Calculando *VF_1, VF_2, VF_n*, esto es, cuantas veces cambie la *i*, la fórmula se modifica en los siguientes términos.

Para una primera tasa $VF_1 = Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$,

después $VF_2 = VF_1(1+\frac{i}{m})^{n} + Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$

y así sucesivamente $VF_n = VF_n(1+\frac{i}{m})^{n} + Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$

La Anualidad o Renta Periódica:

$$Rp = \frac{VF}{\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}\right]} \quad ó \quad A = \frac{M}{\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}\right]}$$

Su valor presente:

$$VPN = Rp\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{i/m} \quad \text{Se despeja} \quad Rp = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{i/m}}$$

Para calcular el tiempo *“n”* en valor futuro

$$VF = Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m}$$

$$Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m} = VF$$

Pasa dividiendo *Rp* $\frac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m} = \frac{VF}{Rp}$

La *“i”* pasa multiplicando $(1+ i/m)^{n} - 1 = \left[\left(VF/Rp\right) * i/m\right]$

Y la unidad pasa sumando $(1+ i/m)^{n} = \left[\left(VF/Rp\right) * i/m\right] + 1$

Ahora aplicamos logaritmos $\log((1+ i/m)^{n}) = \log\left[\left(VF/Rp\right) * i/m\right] + 1$

Ahora se despeja *“n”* $n = \dfrac{Log\left[(\frac{VF}{Rp}) * i\right] + 1}{Log(1+\frac{i}{m})}$

…………Así de simple

Para calcular el tiempo *“-n”* en valor presente neto

De la fórmula $VPN = Rp\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}$ tenemos que $\frac{VPN * i/m}{Rp} = 1-(1+ i/m)^{-n}$

Para despejar *–n* $(1+ i/m)^{-n} = 1-\left[\frac{NPV * i/m}{Rp}\right]$

Así obtenemos

$$Log((1+ \tfrac{i}{m})^{-n}) = Log(1- \left[\frac{NPV * \tfrac{i}{m}}{Rp}\right])$$

Despejamos " *-n*", y ahora tenemos la siguiente expresión

$$-n = \frac{Log(1- \left[\frac{NPV * \tfrac{i}{m}}{Rp}\right])}{Log(1+ \tfrac{i}{m})}$$

Si obtenemos un resultado con decimales: ejemplo **5.78** esto quiere decir que son 5 pagos de una cantidad "x" y 1 pago por la diferencia.

Para ello se trae a valor presente el importe de los pagos:

$$VPN = Rp\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}$$

Para conocer el valor del sexto pago tenemos:

$$VPN\_de\_la\_deuda = VPN\_de\_los\_pagos + \frac{x}{(1+ \tfrac{i}{m})^{n}}$$

Al despejar "x" El *VPN* de la deuda pasa restando al *VPN* de los pagos y la diferencia se multiplica por el factor de acumulación (1+i) con exponente *n+1*: esto es, *n* (numero de pagos) más el último pago (1).

Para el caso que utilizamos de 5.78 pagos, entonces sería 5+1=6 (n=6)

$$x = (1+ \tfrac{i}{m})^{6} * (VPNdeuda - VPNpagos)$$

Para calcular la tasa de interés *"i"* En Valor Futuro o Monto

Del monto $VF = Rp \dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m}$

Tenemos que $Rp \dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m} = VF$

Rp pasa dividiendo al lado derecho $\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m} = VF/Rp$

Y para calcular "*i*" esto se hace al tanteo, equiparando el factor resultante del valor futuro entre la renta o pago periódico (*VF/Rp).*

Para ello, se sugiere elaborar una tabla en Excel.

En Valor Presente Neto

Del valor presente de una anualidad ordinaria:

$$Rp = \frac{VPN}{\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}}$$

Despejamos $\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m} = VPN/Rp$ y para calcular *i*, nuevamente se tiene que hacer al tanteo como en el caso anterior.

En ambos casos se sugiere tener elaborada una tabla proforma, con valores de tasas que van de 1% a 9% (0.01 a 0.09)

Ejemplo de una tabla en Excel:

$$\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

La n se manipula como variable input

La i se manipula como variable input

Estos son los factores, el cual se buscara equiparar al resultado de VPN/Rp

n	*i*		Factor
6	0.01	0.94204524	5.795476475
	0.02	0.88797138	5.601430891
	0.03	0.83748426	5.417191444
	0.04	0.79031453	5.242136857
	0.05	0.7462154	5.075692067
	0.06	0.70496054	4.917324326
	0.07	0.66634222	4.76653966
	0.08	0.63016963	4.622879664
	0.09	0.59626733	4.48591859
al tanteo	0.0499	0.74664195	5.077315679

5.1.1.3.- Ejercicios Resueltos

Anualidad ordinaria:

El Sr. Pérez ha decidido crear un fondo para su hijo, el pequeño Martín, el cual podrá disponer íntegramente el día de su graduación Universitaria. Para ello, comienza depositando $200.00 al final de cada mes dando inicio cuando su hijo Martin, cumplió un año y hasta el día de su cumpleaños número 23. Durante los primeros 10 años la cuenta le paga un interés de 12% anual capitalizable mensualmente. Los siguientes 10 años pago un interés de 15% anual capitalizable mensualmente y los últimos 2 años pago un interés del 18% anual capitalizable mensualmente. ¿Cuál es la suma que recibirá Martincito cuando cumpla 23 años?

*Recuerde que Martín ya tenía un año cuando se abrió la cuenta, por lo tanto se cuentan solamente 22 años para llegar a su cumpleaños número 23.

Utilizamos la fórmula del monto de un conjunto de abonos (cuotas uniformes):

- Durante los primeros 10 años se acumula:

$$M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m} \qquad M = \$200.00\frac{(1+\frac{.12}{12})^{120} - 1}{.12/12} \qquad M = \$200.00(230.0386) = \$46{,}007.72$$

- Durante los siguientes 10 años se acumula:

$$VF_2 = VF_1(1+ i/m)^{n} + Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m}$$

$$VF_2 = \$46{,}007.72(1+.15/12)^{120} + \$200.00\frac{(1+\frac{.15}{12})^{120} - 1}{.15/12}$$

$$VF_2 = \$46{,}007.72(4.44021) + \$200.00(275.2168) = \$259{,}327.29$$

- Durante los últimos 2 años acumuló:

$$VF_3 = VF_2(1+ i/m)^{n} + Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n} - 1}{i/m}$$

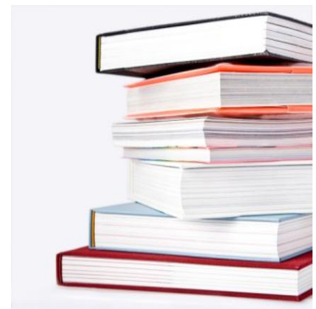
$$VF_3 = \$259{,}327.29(1+.18/12)^{24} + \$200.00\frac{(1+\frac{.18}{12})^{24} - 1}{.18/12}$$

$$VF_3 = \$259{,}327.29(1.42950) + \$200.00(28.63352)$$

$$VF_3 = \$376{,}435.06$$

El importe de $376,435.05 es la suma que recibirá Gabriel el día de su cumpleaños número 23. Esto menos el total de los depósitos que ascienden a $\{(120+120+24)*200=52{,}800\}$ es igual al interés acumulado durante los 22 años, lo cual asciende a la cantidad de $323,635.06

Ahora desarrollemos un ejercicio para conocer la tasa de interés *"i"*.



> *Primero calculamos el monto que logra acumular una persona que realiza un determinado número de depósitos y con ello, comprobamos la operación despejando la "i"*

Supongamos que una Señora ahorra $100.00 al final de cada mes durante 60 meses, su inversión le genera una tasa de interés del 15% anual con capitalización mensual (15/12=1.25%). ¿Cuánto logra acumular en su cuenta?

De la fórmula del monto tenemos:

$$M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$$

Luego $M=\$100.00\frac{(1+\frac{.15}{12})^{60}-1}{.15/12}$ $M=\$100.00\frac{(2.10718)-1}{0.0125}$ $M=\$8{,}857.45$

Ahora calculamos la "i" como variable desconocida

Con los datos del ejemplo anterior tenemos:

$M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$ Se pasa dividiendo la cuota uniforme $M/A = \frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$

que es lo mismo que $\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m} = M/A$

Ahora se tiene $\dfrac{(1+\frac{i}{m})^n-1}{i/m} = \$8,8,57.45 \big/ \$100.00 \qquad \dfrac{(1+\frac{i}{m})^n-1}{i/m} = 88.5745$

Aquí debemos buscar en tablas, una tasa que aproxime el factor 88.5745 que estamos requiriendo equiparar.

n	*i*	$\dfrac{(1+\frac{i}{m})^n-1}{i}$			
	0.01	81.6696699		***Monto***	$ 8,857.45
60	0.02	114.051539		***Anualidad***	$ 100.00
	0.03	163.053437		***Factor***	**88.5745**
	0.04	237.990685			
	0.05	353.583718			
	0.06	533.128181			
	0.07	813.520383		***TASA***	***Factor***
	0.08	1253.2133		**1.25**	**88.57450776**
	0.09	1944.79213			
Tanteo	**0.0125**	**88.5745078**			

De esta forma se comprueba.
Como se puede observar el factor que arroja el monto y la anualidad es el mismo que el factor que arroja la tasa del 0.0125 ó 1.25%

Ahora para calcular *"n"* como variable desconocida en valor futuro

Tomamos el ejemplo de la Señora García que ahorró $100.00 al final de cada mes durante *"n"* meses, habiendo recibido una tasa de interés del 15% anual con capitalización mensual (15/12=1.25%) y cuyo monto ascendió a la cantidad de $8,857.45.

¿Cuál fue el plazo de esta operación?

De la fórmula del monto, se despeja *"n",* ahora tenemos la siguiente expresión:

$$n = \frac{\mathrm{Log}\left[\left(\mathrm{VF}/\mathrm{Rp}\right) * i/m\right] + 1}{\mathrm{Log}(1+\frac{i}{m})}$$

La solución es:
(Logaritmo base 10)

$$n=\frac{\mathrm{Log}\left[\left(\$8{,}857.45 / \$100.00\right)*0.0125\right]+1}{\mathrm{Log}(1.0125)} \qquad n=\frac{\mathrm{Log}\left[\left(88.574\right)*0.0125\right]+1}{\mathrm{Log}(1.0125)}$$

$$n=\frac{\mathrm{Log}\left(1.10718125\right)+1}{\mathrm{Log}(1.0125)}=\frac{\mathrm{Log}(2.10718125)}{\mathrm{Log}(1.0125)}=\frac{0.32370189}{0.00539503}=59.9999963=60$$

	Log. Base 10	
2.10718125	0.32370189	59.9999963
1.0125	0.00539503	

Como podrán ver, el resultado de 60 (abonos uniformes) corresponde al tiempo que estuvo ahorrando la Sra. García para poder obtener el monto de $8,857.45 del ejercicio anterior

Ejercicio de valor presente neto

Supongamos que una persona desea adquirir una pantalla de plasma mediante 30 pagos iguales de $30.00 vencidos. Si la tasa de inflación que permanecerá vigente durante todo el lapso de tiempo es del 0.5% mensual, entonces ¿Cuál es el precio de contado de dicha pantalla?

Nota: la expresión i/m no aplica, ya que la tasa que se utiliza, está dada en forma mensual.

De la fórmula del valor presente tenemos que:

$$VPN=Rp\,\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad VPN=\$30.00\,\frac{1-(1+0.005)^{-30}}{0.005} \qquad VPN=\$30.00\,\frac{1-(1.005)^{-30}}{0.005}$$

$$VPN=\$30.00\,\frac{1-(0.86102973)}{0.005} \quad VPN=\$30.00\,\frac{0.13897027}{0.005}$$

$$VPN=\$30.00(27.794054) \qquad VPN=\$833.82$$

Es tan solo un ejemplo, las pantallas de plasma cuestan más $$$.....

Ahora comprobamos, despejando la *"i"* como variable desconocida

Del Valor Presente de una anualidad $Rp = \dfrac{VPN}{\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$ despejamos *"i"*, quedando la siguiente expresión:

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = {}^{VPN}\!/_{Rp}$$

$$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = {}^{833.82}\!/_{30} \qquad \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 27.794$$

Aquí debemos buscar en tablas, una tasa que aproxime el factor 27.794 que estamos necesitando.

Diseñamos una tabla en Excel

n	***i***	$\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$	
30	**0.01**	**0.74192292**	**25.80770822**
	0.02	**0.55207089**	**22.39645555**
	0.03	**0.41198676**	**19.60044135**
	0.04	**0.30831867**	**17.2920333**
	0.05	**0.23137745**	**15.37245103**
	0.06	**0.17411013**	**13.76483115**
	0.07	**0.13136712**	**12.40904118**
	0.08	**0.09937733**	**11.25778334**
	0.09	**0.07537114**	**10.27365404**
al tanteo	**0.005**	**0.86102973**	**27.79405397**
VPN		**$833.82**	***27.79403333***
R		**$30.00**	
		27.79405397	
TASA	**0.005**		

De esta forma se comprueba.
Como se puede observar el factor que arroja la división entre el monto y la anualidad, es el mismo factor que arroja la tasa del 0.005 ó 0.5%

Ahora comprobamos, despejando la *“-n”* como variable desconocida

De la fórmula $VPN = Rp\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}$ tenemos que $\dfrac{VPN * {}^{i}\!/_{m}}{Rp} = 1-(1+{}^{i}\!/_{m})^{-n}$

Para despejar “*–n*”

$$(1+{}^{i}\!/_{m})^{-n} = 1-\left[\frac{NPV * {}^{i}\!/_{m}}{Rp}\right]$$

Aplicamos logaritmos y así obtenemos:

$$Log((1+{}^{i}\!/_{m})^{-n}) = Log\left[1-\left[\frac{NPV * {}^{i}\!/_{m}}{Rp}\right]\right]$$

Despejamos “*-n*”, y ahora se tiene la siguiente expresión:

$$-n = \frac{Log\left[1-\left[\frac{NPV * {}^{i}\!/_{m}}{Rp}\right]\right]}{Log(1+{}^{i}\!/_{m})} \qquad -n = \frac{Log\left[1-\left[\frac{\$833.82 * 0.005}{\$30.00}\right]\right]}{Log(1.005)}$$

Con logaritmo natural:

$$-n = \frac{Log(1-(0.13897))}{Log(1.005)} \quad -n = \frac{Log(0.86103)}{Log(1.005)}$$

$$-n = \frac{-0.149625932}{0.004987542} = -29.99993423 = -30\_pagos\_(\text{-n})$$

Con logaritmo base diez: =LOG (H11, 10)

En Excel

	LOG Base 10	
0.86103	-0.06498172	-29.9999372
1.005	0.00216606	

Con calculadora financiera

$$-n = \frac{Log(0.86103)}{Log(1.005)} \quad -n = \frac{-0.06498172}{0.00216606} = -29.99996307 = -30\_pagos\_(\text{-n})$$

Otros ejercicios con diferente capitalización:

Una persona decide depositar $500.00 al final de cada mes durante 5 años que es el tiempo que se lleva estudiar una carrera universitaria. El primer año le ofrecen una tasa mensual del .5%, el siguiente año del 1% y los restantes 3 años le ofrecen el 1.25% mensual todo ello capitalizable cada 40 días. ¿Cuál es la suma que recibirá al final del plazo?

De la fórmula del VF para interés ordinario tenemos para el primer año:

$$VF = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} \qquad VF = \$500.00\frac{(1+\frac{.005}{30}*40)^{360/40}-1}{.005/30*40}$$

$$VF = \$500.00\frac{(1.006666667)^{9}-1}{0.006666667} \quad VF = \$500.00\frac{(1.061625139)-1}{0.006666667}$$

$$VF = \$500.00\frac{.061625139}{0.006666667}$$

$$VF = \$500.00(9.243770455) \qquad M = \$4,621.88$$

- Para el siguiente año tenemos:

$$VF_2 = VF_1(1+i/m)^{n/m} + Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} \qquad VF_2 = \$4,621.88(1+.01/30*40)^{9} + \$500.00\frac{(1+\frac{.01}{30}*40)^{9}-1}{.01/30*40}$$

$$VF_2 = \$4,621.88(1.0133333333)^{9} + \$500.00\frac{(1.0133333333)^{9}-1}{0.0133333333}$$

$$VF_2 = \$4,621.88(1.126603147) + \$500.00\frac{(1.126603147)-1}{0.0133333333} =$$

$$VF_2 = \$5,207.02 + \$500.00\frac{.126603147}{0.013333333} = \qquad VF_2 = \$5,207.02 + \$500.00(9.495238399)$$

$$VF_2 = \$5,207.02 + \$4,747.62 \quad VF_2 = \$9,954.64$$

- Para los restantes tres años tenemos:

$$VF_3 = VF_2(1+{}^{i}\!/\!_{m})^{n/m} + Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$$

$$VF_3 = \$9,954.64(1+{}^{.0125}\!/\!_{30}*40)^{(360*3/40)} + 500.00\frac{(1+\frac{.0125}{30}*40)^{(360*3/40)}-1}{.0125/30*40}$$

$$VF_3 = \$9,954.64(1.016666667)^{27} + \$500.00\frac{(1.016666667)^{27}-1}{0.016666667}$$

$$VF_3 = \$9,954.64(1.562506342) + \$500.00\frac{(1.562506342)-1}{0.016666667} =$$

$$VF_3 = \$15,554.18 + \$500.00\frac{.562506342}{0.016666667} = \qquad VF_2 = \$15,554.18 + \$500.00(33.75037984)$$

$$VF_3 = \$15,554.18 + \$16,875.19 \qquad VF_3 = \$32,429.37$$

En el tema de anualidades ordinarias en valor futuro, ahora calculamos *"n"* como variable desconocida. Además se pide comprobar: *VF, Rp y la "i"*

Un profesor que ahorra \$7,500.00 al final de cada mes logró reunir la cantidad de \$250,000.00 Sabemos que la tasa de interés que le estuvieron pagando en promedio por todo el tiempo en que estuvo depositando fue de 15% nominal ordinario con capitalizaciones quincenales. La pregunta ahora es

¿Cuál fue el plazo de esta operación?

De la fórmula del monto, se despeja *"n"*, ahora tenemos la siguiente expresión:

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{Log}\left[\left({}^{\mathrm{VF}}\!/\!_{\mathrm{Rp}}\right)*\mathrm{i}/\mathrm{m}\right]+1}{\mathrm{Log}(1+\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})}$$

La solución es:

$$n = \frac{\text{Log}\left[\left(\frac{\$250,000.00}{\$7,500.00}\right) * (.15/360 * 15)\right] + 1}{\text{Log}(.15/360 * 15)} \qquad n = \frac{\text{Log}\left[(33.33333333) * 0.00625\right] + 1}{\text{Log}(1.00625)}$$

Logaritmo natural

$$n = \frac{\text{Log}\left[0.208333333\right] + 1}{\text{Log}(1.00625)} = \frac{\text{Log}(1.208333333)}{\text{Log}(1.00625)} = \frac{0.1892419}{0.00623055} = 30.37322548$$

Logaritmo base 10

Cálculo en Excel

	LOG Base 10	
1.20833333	0.08218676	30.37324264
1.00625	0.00270589	

Logaritmo base 10

$$n = \frac{\text{Log}\left[0.208333333\right] + 1}{\text{Log}(1.00625)} = \frac{\text{Log}(1.208333333)}{\text{Log}(1.00625)} = \frac{0.08218676}{0.00270589} = 30.37328199$$

Como podrán ver, el resultado de 30.373 (abonos uniformes), corresponde al tiempo que estuvo ahorrando el profesor para obtener el monto de $250,000.00

La comprobación de VF es: $VF = A\dfrac{(1+\frac{i}{m})^n - 1}{i/m}$

$$VF = \$7,500.00\frac{(1.00625)^{30.37328199} - 1}{.00625} \qquad VF = \$7,500.00\frac{(1.208333629) - 1}{.00625}$$

$$VF = \$7,500.00\frac{.208333629}{.00625} \quad VF = \$7,500.00(33.33338068) \; VF = \$250,000.35$$

La comprobación de Rp es: $Rp = \dfrac{VF}{\dfrac{(1+ i/m)^{n/m} - 1}{i/m}}$

$$Rp = \frac{\$250,000.00}{\frac{(1.00625)^{30.37328199} - 1}{0.00625}} \quad Rp = \frac{\$250,000.00}{\frac{(1.208333629) - 1}{0.00625}} \quad Rp = \frac{\$250,000.00}{\frac{.208333629}{0.00625}}$$

$$Rp = \frac{\$250,000.00}{33.33338068} = \$7,499.99 = \$7,500.00 \qquad Rp = \$7,500.00$$

La comprobación de *"i"* es:

Del valor futuro VF, se tiene que:

$$VF = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m}$$

Despejamos la cuota periódica o abono y se pasa dividiendo como denominador en el VF quedando:

$$\frac{VF}{A} = \frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m}$$

Que es lo mismo que

$$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m} = \frac{VF}{A}$$

Entonces se tiene:

$$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m} = \frac{\$250,000.00}{\$7,500.00}$$

Y el factor a buscar es:

$$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m} = 33.33338064$$

Aquí debemos buscar en tablas, una tasa que aproxime el factor 33.33338064 que estamos necesitando.

n	I	$\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$	
	0.01	1.3528638	35.28637509
	0.02	1.8247987	41.23993358
	0.03	2.4541885	48.47295071
	0.04	3.2912241	57.28060264
	0.05	4.4013647	68.02729449
	0.06	5.8697655	81.16275841
	0.07	7.8069268	97.24181086
	0.08	10.3558860	116.9485752
	0.09	13.7013532	141.1261463
	0.00625	**1.2083332**	**33.33331261**

NPV	**$ 250,000.00**	***33.33338064***
R	**$ 7,500.00**	
		Factor
TASA	**0.00625**	**33.33331261**

De esta forma se comprueba.
Como se puede observar el factor que arroja la división entre el monto y la anualidad, es el mismo que el factor que arroja la tasa del 0.00625 ó 0.625% quincenal, que es lo mismo que 1.25% mensual o el 15% anual

Ejercicios para resolver

1.- Un Señor ha decidido crear un fondo para su retiro, el cual estima será en aproximadamente 25 años. Realizará depósitos al final de cada mes por $550.00 durante los primeros 5 años. Los posteriores 7 años llevará a cabo el mismo procedimiento, solo que ahora depositará $750.00 y los restantes 13 años establecerá una cuota mensual de $1,580.00.

Se pide calcular el Valor Futuro de esta anualidad ordinaria considerando las siguientes tasas:

a.- Para los primeros 5 años se pacta una tasa del 9% nominal, con capitalizaciones cada 24 días.

b.- Los siguientes 7 años se incrementa la tasa al 12% nominal, solo que la capitalización se estipula cada 52 días.

c.- Los restantes 13 años fijan la tasa del 5% trimestral, con capitalización cada 29 días.

2.- Una inversión que logro acumular la cantidad de $150,000.00 durante 5 años con depósitos mensuales (ordinarios) y con una tasa promedio del 6.9% anual capitalizable quincenalmente.

a.- ¿De cuánto debió haber sido cada depósito?
b.- Con la solución anterior, ahora compruebe: "n", "i" y el VF

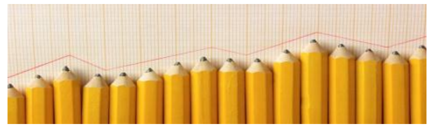
3.- Una inversión que logro acumular la cantidad de $150,000.00 durante 5 años con depósitos mensuales (ordinarios) y con una tasa promedio del 6.9% semestral capitalizable cada 21 días.

a.- ¿De cuánto debió haber sido cada depósito?
b.- Con la solución anterior, ahora compruebe: "n", "i" y el VF

4.- Si usted desea adquirir un auto del año y le ofrecen 24 pagos fijos iguales de $7,850.00 y fijan como tasa de operación el 1.5% mensual con capitalización cada 40 días, entonces:

a.- ¿Cuál es el precio de contado de dicho vehículo?
b.- Con la solución anterior, ahora compruebe: "-n", "i", Rp

5.1.2.- ANTICIPADAS



Son aquellas anualidades que son utilizadas con menor frecuencia en la actividad financiera y comercial ya que los pagos se hacen por anticipado, salvo que el deudor (en caso de alguna compra a plazos) desee liquidar por adelantado sus pagos. Ahora bien, en el caso de una cuenta de depósitos (pudiera ser un fideicomiso), estos se hacen a inicio del convenio y así sucesivamente hasta el final del convenio.

También son conocidas como anualidades ciertas, simples e inmediatas.

Las características de este tipo de anualidades son:

- El plazo inicia con la firma del convenio
- Las capitalizaciones coinciden con el intervalo de pago
- Los pagos o abonos se realizan al inicio de cada intervalo de pago
- Se conoce desde la firma del convenio, las fechas de inicio y término del plazo de la anualidad

5.1.2.1.- Variables que se utilizan en este apartado:

VPN: Valor Presente Neto (de un conjunto de pagos o abonos)
VF ó M: Valor Futuro o Monto (de la suma de unos pagos o abonos)
A ó Rp: Anualidad o Renta periódica (cuota uniforme o anualidad)
m: Capitalización (por su tipo de capitalización, mensual, bimestral etc., la tasa se divide entre el tipo de capitalización: ejemplo de ello si tenemos una tasa nominal del 12% capitalizable mensualmente = (12%/12), quincenal = (12%/24) etc.
i: Tasa de Interés (la tasa que integra el factor de acumulación o descuento 1+i)
n: Tiempo

5.1.2.2.- Procedimiento:

Para calcular el monto de una serie de pagos, el pago periódico, la tasa y el tiempo, utilizaremos las siguientes fórmulas:

Su monto: $VF = Rp(1+i/m)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$ ó $M = A(1+i/m)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$

Al igual que en las anualidades ordinarias, cuando las tasas de interés cambian en el lapso del tiempo, se buscará el *VF* de la anualidad de la siguiente forma:

Calculando VF_1, VF_2, VF_n ó M_1, M_2, M_n esto es, cuantas veces cambie la *"i"*, la fórmula se modifica en los siguientes términos:

Para una primera tasa

$$VF = Rp(1+i/m)\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$$

Una siguiente tasa

$$VF_2 = VF_1(1+{}^{i}\!/_{m})^{n/m} + Rp(1+i/m)\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$$

Y así sucesivamente

$$VF_n = VF_2(1+{}^{i}\!/_{m})^{n/m} + Rp(1+i/m)\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$$

La Anualidad o Renta Periódica:

$$Rp = \frac{VF}{(1+i/m)\left[\dfrac{(1+{}^{i}\!/_{m})^{n/m}-1}{i/m}\right]} \quad ó \quad A = \frac{M}{(1+i/m)\left[\dfrac{(1+{}^{i}\!/_{m})^{n/m}-1}{i/m}\right]}$$

Nota importante: la expresión n/m se refiere al número de capitalizaciones que se realizan en el tiempo que tendrá de vigencia la operación (sea pago o abono).

Para calcular el tiempo *"n"* en el valor futuro o monto de una anualidad anticipada

De la fórmula del monto $M = A(1+i)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m}$ ó Valor futuro $VF = Rp(1+i/m)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m}$ seleccionamos la que utilizaremos.

Para este ejercicio tomamos el valor futuro

$$\mathrm{VF} = \mathrm{Rp}(1+\mathrm{i}/\mathrm{m})\frac{(1+\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{\mathrm{n/m}} - 1}{\mathrm{i}/\mathrm{m}}$$

Que es lo mismo que $\mathrm{Rp}(1+\mathrm{i})\dfrac{(1+\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{\mathrm{n/m}} - 1}{\mathrm{i}/\mathrm{m}} = \mathrm{VF}$

Ahora pasa dividiendo Rp quedando la expresión como:

$$(1+\mathrm{i}/\mathrm{m})\frac{(1+\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{m}})^{\mathrm{n/m}} - 1}{\mathrm{i}/\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{VF}}{\mathrm{Rp}}$$

Posteriormente la i pasa multiplicando

$$(1+\mathrm{i}/\mathrm{m})(1+{}^{\mathrm{i}}\!/_{\mathrm{m}})^{\mathrm{n/m}} - 1 = \left[\left({}^{\mathrm{VF}}\!/_{\mathrm{Rp}}\right) * \mathrm{i}/\mathrm{m}\right]$$

Y la unidad pasa sumando

$$(1+\mathrm{i}/\mathrm{m})(1+{}^{\mathrm{i}}\!/_{\mathrm{m}})^{\mathrm{n/m}} = \left[\left({}^{\mathrm{VF}}\!/_{\mathrm{Rp}}\right) * \mathrm{i}/\mathrm{m}\right] + 1$$

Ahora aplicamos logaritmos

$$\log((1+\mathrm{i}/\mathrm{m})(1+{}^{\mathrm{i}}\!/_{\mathrm{m}})^{\mathrm{n/m}}) = \log\left[\left({}^{\mathrm{VF}}\!/_{\mathrm{Rp}}\right) * \mathrm{i}/\mathrm{m}\right] + 1$$

Y se despeja n, quedando la siguiente expresión

$$\mathrm{n} = \frac{\mathrm{Log}\left[\left({}^{\mathrm{VF}}\!/_{\mathrm{Rp}}\right) * \mathrm{i}/\mathrm{m}\right] + 1}{\mathrm{Log}\left((1+{}^{i}\!/_{m})(1+{}^{\mathrm{i}}\!/_{\mathrm{m}})\right)}$$ Así de simple.

Para calcular el tiempo *"-n", "-n/m"* en valor presente neto de una anualidad anticipada

De la fórmula

$$VPN = Rp(1+ {}^{i}\!/\!_{m})\frac{1-(1+i/m)^{-n/m}}{i/m}$$

Tenemos que

$$\frac{VPN}{Rp} = (1+ {}^{i}\!/\!_{m})\frac{1-(1+i/m)^{-n/m}}{i/m}$$

Para despejar "*-n":*

$$(1+ {}^{i}\!/\!_{m})\frac{1-(1+i/m)^{-n/m}}{i/m} = \frac{VPN*i/m}{RP}$$

Ahora la unidad pasa restando al lado derecho y obtenemos

$$Log((1+ {}^{i}\!/\!_{m})(1+ {}^{i}\!/\!_{m})^{-n/m}) = Log(1-\left[\frac{NPV* {}^{i}\!/\!_{m}}{Rp}\right])$$

Ahora se tiene la expresión

$$-n/m = \frac{Log(1-\left[\frac{NPV* {}^{i}\!/\!_{m}}{Rp}\right])}{Log(1+ {}^{i}\!/\!_{m})(1+ {}^{i}\!/\!_{m})}$$

Si obtenemos un resultado con decimales: ejemplo **5.78** esto quiere decir que son 5 pagos de una cantidad "*x*" y 1 pago por la diferencia. Para ello se trae a valor presente el importe de los pagos:

$$VPN = Rp(1+ {}^{i}\!/\!_{m})\frac{1-(1+i/m)^{-n/m}}{i/m}$$

Para conocer el valor del sexto pago tenemos:

$$VPN\_de\_la\_deuda = VPN\_de\_los\_pagos + \frac{x}{(1+ {}^{i}\!/\!_{m})^{n/m}}$$

Al despejar "x" el *VPN* de la deuda pasa restando al *VPN* de los pagos y la diferencia se multiplica por el factor de acumulación (1+i) con exponente n+1: esto es, *n* (numero de pagos) más el último pago (1).

Para el caso que utilizamos de 5.78 pagos, entonces sería 5+1=6 (n=6)

$$x = (1+ {}^{i}\!/\!_{m})^{6} * (VPNdeuda - VPNpagos)$$

Para calcular la tasa de interés *"i"*

En Valor Futuro o Monto sabemos que:

$$VF = Rp(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$$

De ahí que

$$Rp(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = VF$$

Rp pasa dividiendo al lado derecho

$$(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = {}^{VF}\!/\!{}_{Rp}$$

Y para calcular *i*, se hace al tanteo, equiparando el factor resultante de *VF/Rp*

En Valor Presente Neto

Del valor presente

$$Rp = \frac{VPN}{(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})\frac{1-(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})^{-n/m}}{i/m}}$$

Despejamos el conjunto

$$(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})\frac{1-(1+ {}^{i}\!/\!{}_{m})^{-n/m}}{i/m} = {}^{VPN}\!/\!{}_{Rp}$$

Y para calcular *i*, se hace al tanteo, equiparando el factor resultante de dividir: *VPN/Rp*

En ambos casos se sugiere tener elaborada una tabla proforma, con valores de tasas que van de 1% a 9% (0.01 a 0.09)

Ver ejemplo a continuación

La *n* se manipula como variable input

n	*i*	factor 1	factor 2	$(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$	
6	0.01	1.01	0.94204524	5.79547647	5.853431
	0.02	1.02	0.88797138	5.60143089	5.713459
	0.03	1.03	0.83748426	5.41719144	5.579707
	0.04	1.04	0.79031453	5.24213686	5.451822
	0.05	1.05	0.7462154	5.07569207	5.329476
	0.06	1.06	0.70496054	4.91732433	5.212363
	0.07	1.07	0.66634222	4.76653966	5.100197
	0.08	1.08	0.63016963	4.62287966	4.992710
	0.09	1.09	0.59626733	4.48591859	4.889651
al tanteo	**0.01735**	**1.01735**	**0.90194**	**5.651871**	**5.749931**

La *i* se manipula como variable input

5.1.2.3.- Ejercicios

Cada 56 días el contador de la empresa Apolo, S.A. de C.V., deposita $15,500.00 en pagarés como una medida de previsión para liquidar algún compromiso futuro de la empresa. La tasa nominal ordinaria es del 9% ¿Qué cantidad tendrá acumulada en el pagaré número 17, de seguir depositando normalmente cada 56 días dicha cantidad?

La solución:

Primeramente calculamos la tasa capitalizable que utilizaremos en el desarrollo del ejercicio. Si la tasa es del 9 nominal ordinaria y los depósitos se hacen cada 56 días, entonces calculamos la tasa de la siguiente forma:

$$i = \frac{0.09*56}{360} \qquad i = 0.014$$

Y la expresión “n/m” que corresponde al número de capitalizaciones que se realizarían por el tiempo de vigencia, en este ejercicio nos dan el número de pagarés (que son 17).

De la fórmula del monto se sabe que:

$$M = A(1+i/m)\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$$

Entonces tenemos:

$$M = \$15,500.00(1+0.014)\frac{(1.014)^{17}-1}{0.014} \qquad M = \$15,500.00(1.014)\frac{(1.266616773)-1}{0.014}$$

$$M = \$15,500.00(1.014)\frac{(.266616773)}{0.014} \qquad M = \$15,500.00(1.014)(19.04405521)$$

$$M = \$15,500.00(19.31067199) \qquad M = \$299{,}315.42$$

Ahora supongamos que el contador de la empresa Apolo, sigue realizando los mismos depósitos con la misma frecuencia e importe, pero ahora le mejoran la tasa nominal ordinaria quedando en 12%, siempre y cuando reinvierta la cantidad acumulada hasta el momento.

¿Qué cantidad acumularía hasta el pagaré número 30? (consecutivo). Primeramente debemos considerar que los primeros 17 pagarés se depositaron a una tasa diferente, así que a partir del pagaré 18 y hasta el 30, faltarían 13 períodos de 56 días.

La fórmula a utilizar es la siguiente: $M_2 = M_1(1+{}^{i}\!/_{m})^{n/m} + A(1+i)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$

La solución:

Si la tasa es del 12 nominal ordinaria y los depósitos se hacen cada 56 días, entonces calculamos la tasa de la siguiente forma: $i = \dfrac{0.12*56}{360}$

$i = 0.018666667$ y el exponente *"n/m"* ya lo conocemos (son 13 pagarés)

$$M_2 = \$299,315.42(1.018666667)^{13} + \$15,500.00(1.018666667)\frac{(1.018666667)^{13}-1}{0.018666667}$$

$$M_2 = \$299,315.42(1.271795364) + \$15,500.00(1.018666667)\frac{(1.271795364)-1}{0.018666667}$$

$$M_2 = \$299,315.42(1.271795364) + \$15,500.00(1.018666667)(14.56046565)$$

Esta es la cantidad que acumularía hasta el pagaré número 30

$$M_2 = \$80,667.96 + \$229,900.05 = \$610,568.01$$

La Anualidad o Renta Periódica:

$$Rp=\frac{VF}{(1+i)\left[\frac{(1+{}^{i}\!/\!_{m})^{n/m}-1}{i}\right]} \qquad ó \qquad A=\frac{M}{(1+i)\left[\frac{(1+{}^{i}\!/\!_{m})^{n/m}-1}{i}\right]}$$

Para conocer el valor de la anualidad o renta periódica a partir de un monto, podremos utilizar la fórmula del Monto o Valor Futuro, despejando la *A ó Rp*, según sea la notación que utilicemos:

Para probar este teorema, utilizaremos los datos del ejercicio anterior relativos al primer momento del monto.

M= $299,315.42
i= 9% nominal ordinaria
A= ¿ ? Cada 56 días
n=17 pagares de 56 días

La solución es:

$$A=\frac{\$299,315.42}{(1+\frac{0.09*56}{360})\left[\frac{(1+.09*56/360)^{17}-1}{.09*56/360}\right]} \qquad A=\frac{\$299,315.42}{(1.014)\left[\frac{(1.014)^{17}-1}{0.014}\right]}$$

$$A=\frac{\$299,315.42}{(1.014)\left[\frac{(1.266616773)-1}{0.014}\right]} \qquad A=\frac{\$299,315.42}{(1.014)(19.04405524)}=\frac{\$299,315.42}{19.31067202}=\$15,500.00$$

El importe de cada depósito o cuota periódica es entonces de $15,500.00

Su valor presente:

De la fórmula del *Valor Presente Neto* de una serie de cuotas uniformes

$$VPN = Rp(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m}$$

Se despeja

$$Rp = \frac{VPN}{(1+i/m)\frac{1-(1+{}^{i}\!/_{m})^{-n/m}}{i/m}}$$

Para probar este teorema, utilizaremos los siguientes datos:

Se tiene la opción de adquirir un auto en 12 meses con pagos iguales, sólo que deben ser anticipados (solo como ejemplo). El precio de contado de dicho vehículo es de $187,000.00 que incluye seguro, comisión de apertura de crédito y todo lo que conlleva esta operación. Para ello queda estipulada una tasa de interés del 2.8% mensual.

Ahora se desea conocer el importe de los pagos mensuales iguales *Rp*= ¿ ? *VPN*= $187,000.00, *i*= 2.8% mensual ordinaria (*i/m* solo si la tasa es anual), *n*=12 (se estipulan de inicio los doce pagos).

La comprobación es: $Rp = \frac{VPN}{(1+i/m)\frac{1-(1+{}^{i}\!/_{m})^{-n/m}}{i/m}}$

$$Rp = \frac{\$187,000.00}{(1.028)\frac{1-(1.028)^{-12}}{0.028}} \quad Rp = \frac{\$187,000.00}{(1.028)\frac{1-0.71793086}{0.028}} \quad Rp = \frac{\$187,000.00}{(1.028)\frac{0.28206914}{0.028}}$$

$$Rp = \frac{\$187,000.00}{(1.028)(10.0738977)} \quad Rp = \frac{\$187,000.00}{10.3559668} = \$18,057.22$$

El resultado son 12 pagos de $18,057.22 que dan un total de $216,686.64 el cual ya incluye los intereses generados.

Tan solo para comprobar este cálculo, corremos los datos en un simulador en Excel (en ambas modalidades: vencidas y anticipadas) y se obtiene el siguiente:

ANUALIDADES SIMPLES, CIERTAS E INMEDIATAS. (Valor actual y tablas de amortización)

INICIO

Calculo de anualidades a partir del Valor Actual y comprobación con tablas de amortización.

VALOR ACTUAL=C=	187,000.00
Tasa mensual	2.80%
n=	12.00
Anualidad Vencida	**18,562.82**
Anualidad Anticipada	**18,057.22**

Anualidad Vencida	18,562.82
i=	2.80%
n=	12.00
VALOR ACTUAL=C=	**187,000.00**

Anualidad Anticipada	18,057.22
i=	2.80%
n=	12.00
VALOR ACTUAL=C=	**187,000.00**

Saldo insoluto en el pago	5
Anualidad Vencida	**116,528.41**
Anualidad Anticipada	**113,354.49**

Taba de amortización (anualidad vencida)

Abono	Anualidad	Interés	Capital	Saldo	
0				187,000.00	
1	18,562.82	5,236.00	13,326.82	173,673.18	
2	18,562.82	4,862.85	13,699.98	159,973.20	
3	18,562.82	4,479.25	14,083.58	145,889.62	
4	18,562.82	4,084.91	14,477.92	131,411.71	
5	18,562.82	3,679.53	14,883.30	**116,528.41**	**Saldo insoluto pago 5**
6	18,562.82	3,262.80	15,300.03	101,228.38	
7	18,562.82	2,834.39	15,728.43	85,499.95	
8	18,562.82	2,394.00	16,168.83	69,331.12	
9	18,562.82	1,941.27	16,621.55	52,709.57	
10	18,562.82	1,475.87	17,086.96	35,622.61	
11	18,562.82	997.43	17,565.39	18,057.22	
12	18,562.82	505.60	18,057.22	0.00	**Comprobación**

Taba de amortización (anualidad anticipada)

Abono	Anualidad	Interés	Capital	Saldo	
0				187,000.00	
1	18,057.22		18,057.22	168,942.78	
2	18,057.22	4,730.40	13,326.82	155,615.95	
3	18,057.22	4,357.25	13,699.98	141,915.98	
4	18,057.22	3,973.65	14,083.58	127,832.40	
5	18,057.22	3,579.31	14,477.92	**113,354.49**	**Saldo insoluto pago 5**
6	18,057.22	3,173.93	14,883.30	98,471.19	
7	18,057.22	2,757.19	15,300.03	83,171.16	
8	18,057.22	2,328.79	15,728.43	67,442.73	
9	18,057.22	1,888.40	16,168.83	51,273.90	
10	18,057.22	1,435.67	16,621.55	34,652.35	
11	18,057.22	970.27	17,086.96	17,565.39	
12	18,057.22	491.83	17,565.39	0.00	**Comprobación**

Ahora bien, si fuera el caso que la agencia de autos ofreciera el mismo auto en 12 pagos mensuales anticipados de $18,057.22, la pregunta ahora sería: ¿Cuál es el precio máximo de contado que el cliente podría pagar, considerando una inflación mensual estimada del 0.6%?

Ahora se desea conocer el valor presente neto de los 12 pagos mensuales iguales:

VPN= ¿ ? *i*= 0.6% mensual ordinaria *n*=12 *Rp*=$18,057.22

La comprobación es:

$$VPN = Rp(1+i)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i} \qquad VPN = \$18,057.22(1.006)\frac{1-(1.006)^{-12}}{.006}$$

$$VPN = \$18,057.22(1.006)\frac{1-(0.930731112)}{.006} \qquad VPN = \$18,057.22(1.006)\frac{0.069268888}{.006}$$

$$VPN = 18,057.22(1.006)(11.54481467) \qquad VPN = 18,057.22(11.6140836)$$

$$VPN = \$209,718.06$$

Como podrán notar, las cantidades resultantes difieren una de otra, esto obedece a lo siguiente:

1.- En el ejercicio en donde se calcula el importe de los pagos (*Rp*), se incluye el interés del 2.8% mensual lo que hace que el importe del automóvil se eleve a $216,686.64

2.- En el cálculo del valor presente neto de los pagos, partimos del supuesto de que la Agencia de Autos, ofreciera dicho vehículo a 12 pagos de $18,057.22, entonces tendríamos que traer a valor presente el importe de cada uno de estos pagos, y determinar un *VPN* del total de los mismos y con ello, conocer el precio máximo de contado que en ese esquema, debiera pagar el cliente.

3.- Debemos considerar que para fines académicos, y para poder probar matemáticamente las fórmulas, es que se utilizaron los mismos datos, pero como recordarán, en los datos iniciales quedó establecido que el auto tiene un precio de lista de $187,000.00 y es con este precio, que finalmente usted podría adquirir el auto, o mejor aún, no compre nada y mejor ahorre su dinero.

Resolvamos un ejercicio de <u>Anualidad anticipada</u>: (a partir de *VPN*)

Considere el caso de una persona que adquiere para su hogar un equipo hidroneumático, el cual incluye la instalación. El importe de contado de la operación es de $114,500.00, pero es adquirido en 12 pagos iguales de $11,500.00 a partir de la firma del contrato.

Ahora la pregunta es: ¿Cuál fue la tasa de interés mensual que se pagó por dicho equipo?

Rp= $11,500.00   *VPN*= $114,500.00   *i*= ¿   ?   *n*=12

La solución es:

De la fórmula del valor presente, sabemos que:

$$VPN = Rp(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m}$$

Considerando que *i* es desconocida, entonces toda función que contenga la tasa de interés pasa como variable desconocida

$$(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m}$$ Es la variable desconocida

Por lo tanto la función *i* es igual al VPN (*como numerador*) que divide a la variable despejada *Rp (como denominador),* resultando*:*

$$Rp(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m} = VPN \qquad (1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m} = \frac{VPN}{Rp}$$

Entonces, con los datos
Rp= \$11,500.00 *VPN*= \$114,500.00 *i*= ¿ ? *n*=12

Resolvemos:

$$(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m} = \frac{\$114,500.00}{\$11,500.00}$$

$$(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m} = 9.956521739$$

Con este resultado, buscamos encontrar la tasa al tanteo con una tabla proforma que podemos diseñar en Excel (de la fórmula del valor presente neto de una anualidad anticipada), de la siguiente forma:

Diseño en Excel

n	i	factor 1	factor 2	$(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$	
12	0.01	1.01	0.88744923	11.2550775	11.36762825
	0.02	1.02	0.78849318	10.5753412	10.78684805
	0.03	1.03	0.70137988	9.95400399	10.25262411
	0.04	1.04	0.62459705	9.38507376	9.760476711
	0.05	1.05	0.55683742	8.86325164	9.306414218
	0.06	1.06	0.49696936	8.38384394	8.886874577
	0.07	1.07	0.44401196	7.9426863	8.498674337
	0.08	1.08	0.39711376	7.53607802	8.138964258
	0.09	1.09	0.35553473	7.16072528	7.805190552
al tanteo	**0.035923**	**1.035923**	**0.654739**	**9.611028**	**9.956288889**

MENU

Notas:

Solo utilizar las celdas amarillas

$$NPV = R(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$\frac{NPV}{R} = (1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$$

$$(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right) = \frac{NPV}{R}$$

NPV	**$ 114,500.00**	***9.956521739***
R	**$ 11,500.00**	

TASA
0.03592

9.956288889

Como se puede observar, el factor resultante *VPN/Rp* _es similar al factor que arroja la fila denominada “al tanteo”, con una tasa del 0.035923 o 3.5923% aprox.

Con este dato, ahora pasamos a realizar algunos cálculos:

El importe de contado de la operación es de **$114,500.00**, pero es adquirido en **12** pagos iguales de **$11,500.00** a partir de la firma del contrato. De ahí que primeramente se busque el valor futuro que habrá de pagar por el equipo hidroneumático.

VF= ($) ¿?
Rp= $11,500.00
i= 0.035923 mensual
n=12

Primeramente

Calculemos el Valor futuro, de las 12 cuotas periódicas que pagará por el equipo hidroneumático

$$VF = Rp(1+i/m)\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}\right]$$

$$VF = \$11,500.00(1+0.035923)\left[\frac{(1+0.035923)^{12}-1}{0.035923}\right]$$

$$VF = \$11,500.00(1.035923)\left[14.6791424\right]$$
$$VF = \$11,500.00(15.20646123) = \$174,874.30$$
$$VF = \$174,874.30$$

Si despejamos *Rp* tenemos:

$$VF = Rp(1+i/m)\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}\right] \qquad Rp = \frac{VF}{(1+i/m)\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$174,874.30}{(1.035923)\left[\frac{(1.035923)^{12}-1}{0.035923}\right]} \qquad Rp = \frac{\$174,874.30}{(1.035923)\left[\frac{(1.527318832)-1}{0.035923}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$174,874.30}{(1.035923)\left[\frac{.527318832}{0.035923}\right]} \qquad Rp = \frac{\$174,874.30}{(1.035923)\left[14.6791424\right]}$$

$$Rp = \frac{\$174,874.30}{15.20646123} = \$11,499.999 = \$11,500.00$$

Su valor presente es:

$$VPN = Rp(1+i/m)\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{i/m} \qquad VPN = \$11,500.00(1+0.035923)\frac{1-(1+.035923)^{-12}}{0.035923}$$

$$VPN = \$11,500.00(1.035923)\frac{1-(1.035923)^{-12}}{0.035923}$$

$$VPN = \$11,500.00(1.035923)\frac{1-(0.65474214)}{0.035923}$$

$$VPN = \$11,500.00(1.035923)\frac{0.34525786}{0.035923}$$

$$VPN = \$11,500.00(1.035923)(9.611053086) \quad VPN = \$11,500.00(9.956310946)$$

$$VPN = \$114,497.60 = \$114,500.00$$

Diferencia de $2.42 por el manejo de los dígitos

Ahora resolvamos un ejercicio de <u>Anualidad anticipada</u>: (a partir de VF)

Considere el caso de una persona que ahorró $150,000.00, habiendo realizado 50 depósitos mensuales anticipados de $2,500.00 Ahora la pregunta es: ¿Cuál fue la tasa de interés mensual promedio que obtuvo?

A= $2,500.00 VPN= $150,000.00 i= ¿ ? n=50

La solución es:

$$(1+ {i}/{m})\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = {VF}/{A}$$

$$(1+ {i}/{m})\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = {\$150,000.00}/{\$2,500.00} \qquad (1+ {i}/{m})\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = 60$$

Al tanteo con una tabla en Excel (de la fórmula del valor futuro o monto de una anualidad anticipada)

Diseño de una hoja de cálculo en Excel

n	i	factor 1	factor 2	$(1+\frac{i}{m})$	$\frac{(1+\frac{i}{m})^n-1}{i/m}$
50	0.01	1.01	1.64463182	64.4631822	65.10781401
	0.02	1.02	2.69158803	84.5794015	86.27098948
	0.03	1.03	4.38390602	112.796867	116.1807733
	0.04	1.04	7.10668335	152.667084	158.773767
	0.05	1.05	11.4673998	209.347996	219.8153955
	0.06	1.06	18.4201543	290.335905	307.7560589
	0.07	1.07	29.4570251	406.528929	434.9859545
	0.08	1.08	46.9016125	573.770156	619.6717689
	0.09	1.09	74.3575201	815.083556	888.4410765
al tanteo	**0.0069787700**	**1.006979**	**1.415845**	**59.587154**	**60.00299871**

VF	**$ 150,000.00**	***60.0000000***
A	**$ 2,500.00**	

TASA **60.00299871**

0.006978770

La tasa promedio que obtuvo fue de 0.0069787700 ó 0.697877%

Ahora comprobemos esta operación:

De la fórmula del monto: $VF = Rp(1+ i/m)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^n - 1}{i/m}$ se tiene que

$$VF = \$2,500(1.00697877)\frac{(1.00697877)^{50}-1}{.00697877} \quad VF = \$2,500(1.00697877)\frac{(1.41584504)-1}{.00697877}$$

$$VF = \$2,500(1.00697877)(59.58715367) \qquad VF = \$2,500(60.00299871)$$

$$VF = \$150,007.50$$

La diferencia de \$7.50 se debe al manejo de los dígitos

Ejercicios para resolver

1.- Un Señor ha decidido crear un fondo para su retiro, el cual estima será en aproximadamente 21 años. Realizará depósitos al inicio de cada mes por $650.00 durante los primeros 3 años. Los posteriores 5 años llevará a cabo el mismo procedimiento, solo que ahora depositará $1,750.00 y los restantes 13 años establecerá una cuota mensual de $4,580.00.

Se pide calcular el Valor Futuro de esta anualidad anticipada considerando las siguientes tasas:

a.- Para los primeros 3 años se pacta una tasa del 7.8% nominal, con capitalizaciones cada 21 días.

b.- Los siguientes 5 años se incrementa la tasa al 15% nominal, solo que la capitalización se estipula cada 40 días.

c.- Los restantes 13 años fijan la tasa del 6% semestral, con capitalización cada 17 días.

2.- Una inversión que logro acumular la cantidad de $550,000.00 durante 3.5 años con depósitos mensuales anticipados y con una tasa promedio del 7.9% anual capitalizable mensualmente.

a.- ¿De cuánto debió haber sido cada depósito?
b.- Con la solución anterior, ahora compruebe: "n", "i" y el VF

3.- Una inversión que logro acumular la cantidad de $800,000.00 durante 3 años con depósitos mensuales anticipados y con una tasa promedio del 6.9% semestral capitalizable cada 21 días.

a.- ¿De cuánto debió haber sido cada depósito?
b.- Con la solución anterior, ahora compruebe: "n", "i" y el VF

4.- Si usted desea adquirir un paquete turístico por el Mediterráneo y le ofrecen 12 pagos fijos iguales anticipados de $14,140.00 y fijan como tasa de operación el 1.5% mensual con capitalización cada 29 días, entonces:

a.- ¿Cuál es el precio de contado de dicho paquete turístico?
b.- Con la solución anterior, ahora compruebe: "-n", "i", Rp

5.1.3.- DIFERIDAS

Son poco utilizadas este tipo de anualidades, aunque cabe resaltar que en la actividad comercial, con frecuencia son utilizadas para vaciar los inventarios, esto es, cuando las empresas quieren rematar su mercancía de temporada, o simplemente por que cambiarán de modelos, surgen las ofertas de "compre ahora y pague después".

Ciertamente resulta atractivo este plan para los clientes ya que de momento no desembolsan cantidad alguna y por otra parte, empiezan a pagar meses después de haber adquirida la mercancía.

Las características de este tipo de anualidades son:

- Se conoce desde la firma del convenio, las fechas de inicio y término del plazo de la anualidad
- Las capitalizaciones coinciden con el intervalo de pago
- El plazo da comienzo en una fecha posterior al de inicio del convenio

5.1.3.1.- Variables que se utilizan en este apartado:

VPN: Valor Presente Neto (de un conjunto de pagos o abonos)
VF ó M: Valor Futuro o Monto (la suma de unos pagos o abonos)
A ó Rp: Anualidad o Renta periódica (cuota uniforme)
m: Capitalización (por su tipo de capitalización, mensual, bimestral etc., la tasa se divide entre el tipo de capitalización: ejemplo si tenemos una tasa nominal del 12% capitalizable mensualmente = (12%/12)
i: Tasa de Interés (la *i* que integra el factor de acumulación o descuento (*1+i*))
n: Tiempo en valor futuro
***-n*=** Tiempo en valor presente
***k* =** diferimiento (tiempo en que se difiere el pago) utilizado en valor presente

NUEVAMENTE SE HACE LA ACLARACION: Para no generar confusión en lo referente a la tasa, la representación *i/m,* se refiere a la tasa nominal que se divide entre el número de meses dependiendo la capitalización. Ejemplo si nos dan una tasa del 12% nominal capitalizable mensualmente, sabemos que debemos dividir 12/12=1%

POR LO ANTERIOR El lector podrá encontrar indistintamente la tasa en su forma ***i* ó en su forma *i/m.***

5.1.3.2.- Procedimiento:

Para calcular el monto de una serie de pagos o abonos, el pago periódico, la tasa y el tiempo, utilizaremos las siguientes fórmulas:

Para la anualidad diferida, se toma de la fórmula de la anualidad ordinaria:

Determinamos su monto: $VF = Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$ ó $M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$

De donde despejamos *Rp,* lo que ahora nos da la Anualidad o Renta Periódica:

$$Rp = \frac{VF}{\left[\frac{(1+i/m)^{n/m}-1}{i/m}\right]} \quad ó \quad A = \frac{M}{\left[\frac{(1+i/m)^{n/m}-1}{i/m}\right]}$$

De ahí que, para calcular su valor presente con diferimiento en el pago (*k-1*) y para el cálculo de *Rp* (desconocida), tenemos:

$VPN = Rp\frac{1-(1+i/m)^{-n/m}}{i/m(1+i/m)^{k-1}}$ Se despeja *Rp* $Rp = \frac{VPN}{\frac{1-(1+i/m)^{-n/m}}{i/m(1+i/m)^{k-1}}}$

5.1.3.3.- Ejercicios resueltos

Ejemplo para cálculo del monto:

Hoy que es 27 de Febrero del 2013, siendo las 11:30 hrs., un empleado de gobierno se propone ahorrar a partir del siguiente año, el bono que le otorgan por honestidad y buen servicio (*es solo un ejemplo*) que le entregan en la segunda quincena de cada mes, mismo que asciende a $580.00

La cuenta de ahorro le ofrece el 15% nominal capitalizable mensualmente. La pregunta ahora es: ¿Cuánto logrará acumular este singular personaje al 1º de enero del 2015?

Veamos este caso de manera muy particular para poder entender la naturaleza de la anualidad diferida.

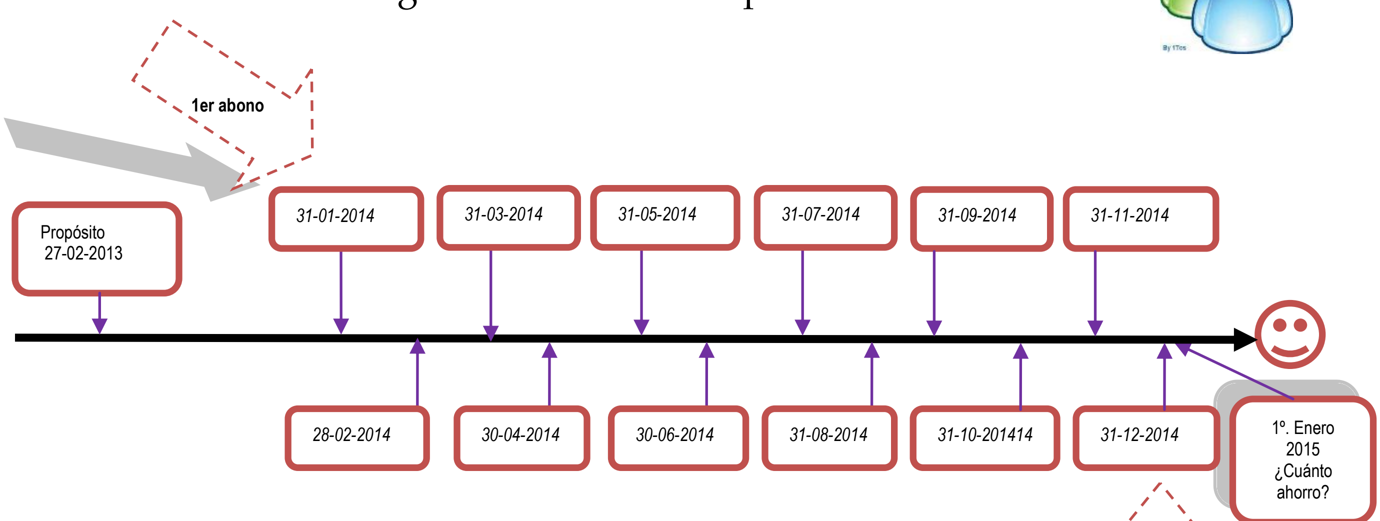
En el ejemplo se señala que el 27 de febrero del 2013, a las 11:30 hrs., de ese día, el empleado toma la decisión de ahorrar a partir del siguiente año.

Lo anterior refiere que empezará a depositar a partir del año 2014.

Ahora bien, el bono que recibe, es en la segunda quincena de cada mes, **lo cual permite suponer que a final del mes de enero del 2014 se realizará el primer depósito y así sucesivamente.**

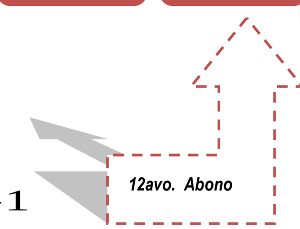
Finalmente la pregunta que se busca responder sobre cuanto tendrá acumulado al 1° de enero del 2016, nos permite suponer que realizará 12 depósitos (*n*=*12*). Si la redacción del texto fuera "Que en un año depositará mensualmente un importe", entonces la función exponencial *n/m* sería: 360/30 =12

Visualicemos la siguiente línea de tiempo:



La solución es:

De la fórmula del monto tenemos que:



$$M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1}{i/m}$$

$$M = \$580.00\frac{(1+\frac{.15}{12})^{12}-1}{15/12} \qquad M = \$580.00\frac{(1.0125)^{12}-1}{0.0125} \qquad M = \$580.00\frac{(1.160754518)-1}{0.0125}$$

$$M = \$580.00\frac{.160754518}{0.0125} \qquad M = \$580.00(12.86036142) \qquad M = \$7{,}459.00$$

Con los mismos datos, ahora comprobamos el valor de la anualidad:

$$A = \frac{M}{\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}\right]} \qquad A = \frac{\$7{,}459.00}{\left[\frac{(1+\frac{.15}{12})^{12}-1}{.15/12}\right]} \qquad A = \frac{\$7{,}459.00}{\left[\frac{(1.0125^{12}-1}{0.0125}\right]}$$

$$A = \frac{\$7{,}459.00}{\left[\frac{1.160754518-1}{0.0125}\right]} \qquad A = \frac{\$7{,}459.00}{\left[\frac{.160754518}{0.0125}\right]} \qquad A = \frac{\$7{,}459.00}{12.86036142}$$

$$\mathbf{A = \$579.999 = \$580.00}$$

Para calcular el tiempo *"n"* en el monto compuesto

$$M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} \qquad A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = M$$

Pasa dividiendo *A* $\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m} = \frac{M}{A}$

La tasa capitalizable *i/m* pasa multiplicando:

$$(1+\frac{i}{m})^{n/m} - 1 = \left[\left(\frac{M}{A}\right) * i/m\right]$$

Y la unidad pasa sumando $(1+\frac{i}{m})^{n/m} = \left[\left(\frac{M}{A}\right) * i/m\right] + 1$

Ahora aplicamos logaritmos y obtenemos la siguiente expresión:

$$log((1+{}^{i}\!/_{m})^{n/m}) = log\left[\left({}^{M}\!/_{A}\right) * i/m\right] + 1$$

Y se despeja la *n* (*n/m*)

$$n = \frac{Log\left[\left({}^{M}\!/_{A}\right) * i/m\right] + 1}{Log(1+\frac{i}{m})}$$

Con los mismos datos, ahora comprobamos el tiempo:

A= \$580.00
VF= \$7,459.00
i=15% nominal capitalizable mensualmente. (.15/12=0.0125)
m= capitalización mensual
n= 12
Realizará 12 depósitos (*n=12*). Si la redacción del texto fuera "Que en un año depositará mensualmente un importe", entonces la función exponencial *n/m* sería: 360/30 =12

La solución es:

$$n = \frac{Log\left[\left({}^{\$7,459.00}\!/_{\$580.00}\right) * (.15/12)\right] + 1}{Log(1+\frac{.15}{12})} \qquad n = \frac{Log\left[(12.86034483) * 0.0125\right] + 1}{Log(1.0125)}$$

$$n = \frac{Log\left[0.16075431\right] + 1}{Log(1.0125)} \qquad n = \frac{Log 1.16075431}{Log 1.0125}$$

Con Logaritmo natural:

$$n = \frac{0.149070061}{0.01242252} = 11.99998559 = 12$$

Con Logaritmo base 10

	Log Base 10		
1.16075431	10	0.0647403	11.9999856
1.0125	10	0.00539503	

Ejercicio de valor presente de una anualidad diferida

Con los siguientes datos calcule el VPN de una anualidad diferida:
Se adeudan $100,000.00 los cuales deben ser liquidados en 12 pagos mensuales iguales, el primero de ellos 6 meses después de la firma del convenio. Se pacta una tasa del 1.5 mensual

A= $580.00
VPN= $100,000.00
i=1.5% mensual.
m= la tasa está dada mensual
n= 12 (son doce pagos, ya no aplica n/m, el dato lo da directo)
k-1= (6 meses después de firmado el contrato)

De la fórmula del valor presente en anualidad ordinaria diferida:

$$VPN = Rp\,\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}$$

Se despeja

$$Rp = \frac{VPN}{\dfrac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n/m}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}} \qquad Rp = \frac{\$100{,}000.00}{\dfrac{1-(1.015)^{-12}}{0.015(1.015)^{6-1}}} \qquad Rp = \frac{\$100{,}000.00}{\dfrac{1-(0.83638742)}{0.015(1.077284)}}$$

$$Rp = \frac{\$100{,}000.00}{\dfrac{0.16361258}{0.01615926}} \qquad Rp = \frac{\$100{,}000.00}{10.12500449} = \$9{,}876.54$$

Con los datos del ejercicio anterior, comprobar el tiempo (–*n*)

A partir de la fórmula

$$Rp = \frac{VPN}{\dfrac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}}$$

El *VPN* pasa multiplicando al factor del producto que integra el diferimiento del tiempo y luego pasa dividiendo la cuota ordinaria *Rp*, para despejar el factor $1-(1+ i/m)^{-n}$

De esta forma transformamos la expresión en:

$$\frac{VPN*(i/m)(1+ i/m)^{k-1}}{Rp} = 1-(1+ i/m)^{-n}$$

De ahí despejamos $(1+ i/m)^{-n}$ y pasamos el producto $\frac{VPN*(i/m)(1+ i/m)^{k-1}}{Rp}$ al lado derecho de la ecuación.

Y así obtenemos:

$$(1+ i/m)^{-n} = 1 - \left[\frac{VPN*(i/m)(1+ i/m)^{k-1}}{Rp}\right]$$

Aplicamos logaritmos para calcular:

$$Log((1+ i/m)^{-n}) = Log(1-\left(\frac{VPN*(i/m)(1+ i/m)^{k-1}}{Rp}\right))$$

$$-n = \frac{Log(1-\left(\frac{VPN*(i/m)(1+ i/m)^{k-1}}{Rp}\right)}{Log(1+ i/m)} \qquad -n = \frac{Log(1-\left(\frac{\$100,000.00*(0.015)(1.015)^{6-1}}{\$9,876.54}\right)}{Log(1.015)}$$

$$-n = \frac{Log(1-\left(\frac{\$1,615.93}{\$9,876.54}\right))}{Log(1.015)} \qquad -n = \frac{Log(1-0.163612966)}{Log(1.015)} \qquad -n = \frac{Log(0.836387034)}{Log(1.015)}$$

Logaritmo natural

$$-n = \frac{-0.178663814}{0.014888612} = -12.00003157 = -12$$

Logaritmo Base 10

	Log Base 10		
0.83638703	10	-0.07759271	
1.015	10	0.00646604	-12.0000311

De esta forma queda comprobado el resultado

Para calcular la tasa de interés *"i" en monto compuesto de anualidad diferida.*

En Valor Futuro o Monto se toma la fórmula de la anualidad ordinaria vencida.

Del monto $$M = A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}$$

Tenemos que……….. $$A\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}=M$$

Por lo que *A* pasa dividiendo al lado derecho

$$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}=M/A$$

Y para calcular *i/m*, se hace al tanteo, equiparando el factor resultante de *M/A*

Tomamos los datos del mismo ejercicio de la pág. 232, 234 y 235

$$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}=\$7,459.00/\$580.00 \qquad \frac{(1+\frac{i}{m})^{n/m}-1}{i/m}=12.8603448$$

Con estos datos, ahora comprobamos la tasa promedio mensual obtenida:

Para ello realizamos al tanteo con una tabla en Excel (de la fórmula del monto de una anualidad diferida)

n	i	$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$
	0.01	12.682503
12	0.02	13.4120897
	0.03	14.1920296
	0.04	15.0258055
	0.05	15.9171265
	0.06	16.8699412
	0.07	17.8884513
	0.08	18.9771265
	0.09	20.1407198
Tanteo	0.0125	12.8603614

Monto	$ 7,459.00
Anualidad	$ 580.00
Factor	**12.8603448**

TASA	***Factor***	**12.86036142**
0.0125		

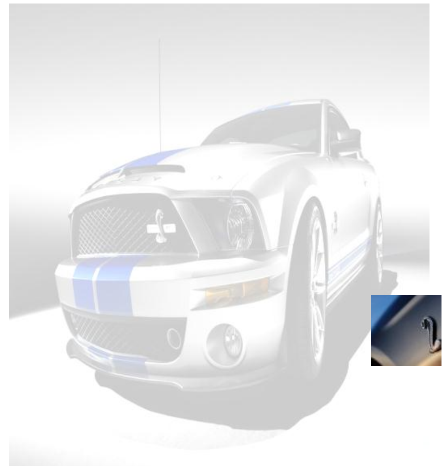
La tasa promedio que obtuvo fue de 0.0125 ó 1.25% mensual

Ahora desarrollamos el tema del valor presente de la anualidad diferida:

De la fórmula: $$VPN = Rp\frac{1-(1+{}^{i}\!/_{m})^{-n}}{{}^{i}\!/_{m}(1+{}^{i}\!/_{m})^{k-1}}$$

Se despeja $$Rp = \frac{VPN}{\dfrac{1-(1+{}^{i}\!/_{m})^{-n}}{{}^{i}\!/_{m}(1+{}^{i}\!/_{m})^{k-1}}}$$

Ahora presentamos un ejemplo de VPN



La agencia Automotriz "El Carrito Veloz" tiene en oferta un convertible que arranca el suspiro de más de una bella dama. El precio de contado de este modesto auto que tiene una serpiente al frente es de \$850,000.00 o un atractivo plan de financiamiento del 40% de enganche y el resto en 15 modestas mensualidades iguales con una tasa promedio mensual del 1.5%. Además ofrece que el primer pago se haga al vencimiento del tercer mes, una vez que se haya dado el enganche y desde luego, haber recibido este veloz auto.

La pregunta es:

¿Qué cantidad debe pagar mensualmente por esta preciosidad de auto?

Entonces, del precio de contado de \$850,000.00 el 40% de enganche son: \$340,000.00, la diferencia que se adeuda es de \$510,000.00

La solución es:

De la fórmula: $\$510,000.00 = Rp\dfrac{1-(1.015)^{-15}}{0.015(1.015)^{3-1}}$ Se despeja

$$Rp = \frac{\$510,000.00}{\dfrac{1-(1.015)^{-15}}{0.015(1.015)^{3-1}}} \quad Rp = \frac{\$510,000.00}{\dfrac{1-(0.7998515)}{0.015(1.015)^{2}}} \quad Rp = \frac{\$510,000.00}{\dfrac{1-0.7998515}{0.015(1.030225)}} \quad Rp = \frac{\$510,000.00}{\dfrac{0.2001485}{0.015453375}}$$

$$Rp = \frac{\$510,000.00}{12.9517662} = \$39,376.87$$

$Rp = \$39,376.87$

Este es el importe de las modestas mensualidades

Para calcular la tasa de interés *"i"* en valor presente de una anualidad diferida. *(Con los datos anteriores)*

Tenemos que: $\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}=\frac{VPN}{Rp}$ $\quad \frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}=\frac{\$510,000.00}{\$39,376}$

$$\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}=12.9517658$$

Al tanteo con una tabla en Excel (de la fórmula del valor presente de una anualidad diferida)

Comprobación:

n	*i*	factor 1	factor 2	$\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}$
15	0.0100	0.1386505	0.01020	13.59186
	0.0200	0.2569852	0.02081	12.35031
	0.0300	0.3581380	0.03183	11.25265
	0.0400	0.4447355	0.04326	10.27957
k	0.0500	0.5189829	0.05513	9.41466
3	0.0600	0.5827349	0.06742	8.64387
	0.0700	0.6375539	0.08014	7.95520
	0.0800	0.6847583	0.09331	7.33837
	0.0900	0.7254619	0.10693	6.78452
al tanteo	**0.0150**	**0.2001485**	**0.01545**	**12.95177**

NPV	**$ 510,000.00**	***12.95176585***
R	**$ 39,376.87**	

TASA	**12.952**
0.0150	

La tasa promedio que obtuvo fue de 0.015 ó 1.5% mensual

A continuación una serie de ejercicios resueltos sobre este tema, mismos que fueron desarrollados en clase por los alumnos.

La idea es que se verifiquen, como parte de una actividad didáctica.

Algunos ejercicios resueltos

1.- Se adquiere un lote de ropa aprovechando la promoción de empezar a pagar a partir de los 6 meses posteriores a la adquisición, con un interés del 3% mensual, capitalizable mensualmente. El importe de la operación fue de $17,460.00. Calcular *Rp* y comprobar "*-n*".

Considerar que la compra se liquidará en 18 meses.

DATOS	
VPN	$17,460.00
-n	18 meses
i	3%mensual
m	Mensual
Rp	¿?
k	6 meses

$$Rp = \frac{17460}{\dfrac{1-\left(1+\frac{.03}{12}\right)^{-18}}{\frac{.03}{12}\left(1+\frac{.03}{12}\right)^{6-1}}} = \frac{17460}{\dfrac{1-(.9560511)}{.0025\,(1.0125626)}} = \frac{17460}{\dfrac{.0439489}{.0025314}} = \frac{17460}{17.3614995}$$

$$\boldsymbol{Rp = \$1005.673502}$$

Comprobación

$$-n = \frac{\log\left(1-\dfrac{17460\left(\frac{.03}{12}\right)\left(1+\frac{.03}{12}\right)^{6-1}}{1005.673502}\right)}{\log\left(1+\frac{.03}{12}\right)} = \frac{\log\left(1-\dfrac{17460(.0025314)}{1005.673502}\right)}{\log(1.0025)} = \frac{\log(.9560511)}{\log(1.0025)}$$

$$= \frac{-.0195188}{.0010843}$$

$$\boldsymbol{-n = -18.001}$$

2.- Pedro se compró un automóvil último modelo y empezó a pagarlo 10 meses después de firmar el contrato de compra-venta. Sus pagos fueron de $10,725.00 mensuales, durante 12 meses, con un interés del 8%nominal capitalizable mensualmente. ¿Cuál es el valor del automóvil? Calcular *VPN* y comprobar *Rp*

DATOS	
VPN	¿?
-n	12 meses
i	8%mensual
m	Mensual
Rp	$10,725.00
k	10 meses

$$VPN = 10725\frac{\frac{1-(1+\frac{.08}{12})^{-12}}{}}{\frac{.08}{12}(1+\frac{.08}{12})^{10-1}} = 10725\frac{1-(.9233614)}{.0066666(1.0616251)} = 10725\frac{.076636}{.0070774}$$
$$= 10725(10.8282702)$$

$$VPN = \$116,133.1979$$

Comprobación

$$Rp = \frac{116133.1979}{\frac{1-(1+\frac{.08}{12})^{-12}}{\frac{.08}{12}(1+\frac{.08}{12})^{9}}} = \frac{116133.1979}{\frac{1-(.9233614)}{.0066666(1.0616251}} = \frac{116133.1979}{\frac{.076636}{.0070774}} = \frac{116133.1979}{10.8282702}$$

$$Rp = \$10,725$$

3.- Se realiza una compra de aparatos electrodomésticos por un importe de $150,000.00 los cuales deben ser liquidados en 12 pagos mensuales iguales, el primero de ellos a los 6 meses después de realizada la operación. La tasa de interés es del de 3.2% nominal capitalizable mensualmente. Calcular *Rp* y comprobar *"-n"*

DATOS	
VPN	$150,000.00
-n	12 meses
i	3.2 % nominal
m	Mensual
Rp	¿?
k	6 meses

$$Rp = \frac{VPN}{\dfrac{1-(1+{}^{i}/_{m})^{-n}}{{}^{i}/_{m}(1+{}^{i}/_{m})^{k-1}}} \qquad Rp = \frac{\$150,000.00}{\dfrac{1-(1.0026666)^{-12}}{0.0026666(1.0026666)^{6-1}}} \qquad Rp = \frac{\$150,000.00}{\dfrac{1-0.9685486}{.0026666(1.0134042)}}$$

$$Rp = \frac{\$150,000.00}{\dfrac{0.0314514}{0.0027023}} \qquad Rp = \frac{\$150,000.00}{11.6387521} \qquad Rp = \$12,887.98$$

COMPROBACIÓN:

$$-n = \frac{\log(1-\dfrac{VPN*({}^{i}/_{m})(1+{}^{i}/_{m})^{k-1}}{Rp})}{\log(1+{}^{i}/_{m})} \qquad -n = \frac{\log(1-\dfrac{\$150,000.00*(0.0026666)(1.0026666)^{6-1}}{\$12,887.97963})}{\log(1.0026666)}$$

$$-n = \frac{\log(1-\dfrac{\$150,000.00*0.0027023}{\$12,887.97963})}{\log(1.0026666)} \quad -n = \frac{(1-\dfrac{\$405.345}{\$12,887.97963})}{\log(1.0026666)} \quad -n = \frac{\log(1-0.0314513)}{\log 1.0026666}$$

$$-n = \frac{\log 0.9685487}{\log 1.0026666} \qquad -n = \frac{-0.0138785}{0.0011565} \qquad -n = -12.0004$$

4.- El precio de operación de una casa de interés social es de \$315,000.00 y serán pagaderos en 12 cuotas mensuales iguales. La primer cuota cuatro meses después de la firma del convenio y se pacta una tasa del 2% anual. Se pide: calcular *Rp* y la comprobación *"-n"*

DATOS	
VPN	\$315,00.00
-n	12 meses
i	2%nominal
m	Mensual
Rp	¿?
k	4 meses

$$Rp=\frac{VPN}{\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m\,(1+i/m)^{k-1}}}\qquad Rp=\frac{\$315,000.00}{\dfrac{1-(1.0016666)^{-12}}{0.0016666(1.0016666)^{4-1}}}\qquad Rp=\frac{\$315,000.00}{\dfrac{1-0.9802157}{.0016666(1.0050081)}}$$

$$Rp=\frac{\$315,000.00}{\dfrac{0.0197843}{0.0016749}}\qquad Rp=\frac{\$315,000.00}{11.8122276}\qquad \$Rp=26,667.28$$

COMPROBACIÓN:

$$-n=\frac{\log\left(1-\dfrac{VPN*(i/m)(1+i/m)^{k-1}}{Rp}\right)}{\log(1+i/m)}\qquad -n=\frac{\log\left(1-\dfrac{\$315,000.00*(0.0016666)(1.0016666)^{4-1}}{\$26,667.28}\right)}{\log(1.0016666)}$$

$$-n=\frac{\log\left(1-\dfrac{\$315,000.00*0.0016749}{\$26,667.28}\right)}{\log(1.0016666)}\qquad -n=\frac{\left(1-\dfrac{\$527.5935}{\$26,667.28}\right)}{\log(1.0016666)}\qquad -n=\frac{\log(1-0.0197843)}{\log 1.0016666}$$

$$-n=\frac{\log 0.9802157}{\log 1.0016666}\qquad -n=\frac{-0.0086783}{0.0007231}\qquad -n=-12.0015$$

5.- En la compra de un paquete de muebles cuya cantidad asciende a los $87,250.00 la tienda departamental ofrece que se liquiden en 10 pagos iguales. El primer pago vencido se comienza a liquidar el día 5 de mayo del 2011 (la fecha de operación es el 5 de octubre del 2010), la tasa de interés pactada en esta operación es del 10% anual y la capitalización mensual. La pregunta es: ¿A cuánto asciende cada pago? (Además compruebe con *"-n"*)

DATOS	
VPN	$87,250.00
-n	10 meses
i	10%anual
m	Mensual
Rp	¿?
	7 meses

$$Rp=\frac{VPN}{\dfrac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}}\quad Rp=\frac{\$87,250.00}{\dfrac{1-(1+\frac{.10}{12})^{-10}}{\frac{.10}{12}(1+\frac{.10}{12})^{7-1}}}\quad Rp=\frac{\$87,250.00}{\dfrac{1-.9203621}{.0083333(1.008333)^{7-1}}}\quad Rp=\frac{\$87,250.00}{\dfrac{.079637834}{.0083333(1.0510512)}}$$

$$Rp=\frac{\$87,250.00}{9.092400357}\qquad Rp=\$9,595.92$$

Comprobación

$$-n=\frac{\log(1-\dfrac{VPN*(\frac{i}{m})(1+\frac{i}{m})^{k-1}}{Rp})}{\log(1+\frac{i}{m})}\qquad -n=\frac{\log(1-\dfrac{\$87,250.00(\frac{.10}{12})(1+\frac{.10}{12})^{7-1}}{\$9,595.92})}{\log(1+\frac{.10}{12})}$$

$$-n=\frac{\log(1-\dfrac{\$87,250.00(0.0083333)(1.05105329)}{\$9,595.92})}{\log 1.0083333}\qquad -n=\frac{\log(1-\dfrac{\$764.2033}{\$9,595.92})}{\log 1.0083333}$$

$$-n=\frac{\log(1-.079638357)}{\log 1.0083333}\quad -n=\frac{\log .920361643}{\log 1.0083333}\quad -n=\frac{-.036041509}{.0036041099}$$

-n = 10.0001

Otros ejercicios para calcular "*Rp*" y su comprobación "*VPN*", "*-n*"

Caso a.- Con los siguientes datos, calcular *Rp* y comprobar con *VPN*:

VPN= $689,573
i=6.3%=.063 anual (ordinario)
m=15 días
n=21 pagos fijos
k=6 meses después de la firma del convenio
Rp=?

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}} \quad \mathbf{RP} = \frac{689573}{\frac{1-(1+\frac{.063}{360}*15)^{-21}}{\frac{.063}{360}*15(1+\frac{.063}{360}*15)^{6-1}}} \quad \mathbf{RP} = \frac{689573}{\frac{1-(1.002625)^{-21}}{.002625(1.002625)^{6-1}}}$$

$$\mathbf{RP} = \frac{689573}{\frac{1-.946435198}{.002625\ (1.0131940)}} \quad \mathbf{RP} = \frac{689573}{\frac{.053564801}{.0026596344}} \quad \mathbf{RP} = \frac{689573}{20.14017145} \quad RP = 34,238.68577$$

COMPROBACIÓN:

$$VPN = RP\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}} \quad \mathbf{VPN} = 34,238.68577\frac{1-(1+\frac{.063}{360})^{-21}}{\frac{.063}{360}*15\ (1+\frac{.063}{360})^{6-1}}$$

$$\mathbf{VPN} = 34,238.68577\frac{1-.946435198}{.002625\ (1.002625)^{6-1}} \quad \mathbf{VPN} = 34,238.68577\frac{.053564801}{.002625(1.0131940)}$$

$$\mathbf{VPN} = 34,238.68577\frac{.053564801}{.0026596344} \quad \mathbf{VPN} = 34,238.68577(20.14017145)$$

$$VPN = 689,573.000$$

Caso b.- Con los siguientes datos, calcular *Rp* y comprobar con “-n”:

VPN = $234,789.00
i=5%=.05 anual (ordinario)
m=mensual
n=17 pagos fijos
k= se da una prórroga de 5 meses para el primer pago
Rp =?

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}} \quad RP = \frac{234789}{\frac{1-(1+\frac{.05}{12})^{-17}}{\frac{.05}{12}(1+\frac{.05}{12})^{5-1}}} \quad RP = \frac{234789}{\frac{1-(1.0041666)^{-17}}{.0041666\,(1.0041666)^{5-1}}}$$

$$RP = \frac{234789}{\frac{1-.931754256}{.0041666\,(1.0167771)}} \quad RP = \frac{234789}{\frac{.068245743}{.00423647}} \quad RP = \frac{234789}{16.10910569} \quad RP = 14,574.92455$$

COMPROBACIÓN:

$$-n = \frac{Log\,1-(\frac{VPN*\frac{i}{m}*(1+\frac{i}{m})^{k-1}}{RP})}{Log\,(1+\frac{i}{m})} \quad -n = \frac{Log\,1-(\frac{234789*\frac{.05}{12}*(1+\frac{.05}{12})^{5-1}}{14{,}574.92455})}{Log\,(1+\frac{.05}{12})}$$

$$-n = \frac{Log\,1-(\frac{234789*.0041666*1.016771123}{14{,}574.92455})}{Log\,1.0041666} \quad -n = \frac{Log\,1-(\frac{994.6785649}{14{,}574.92455})}{Log\,1.0041666}$$

$$-n = \frac{Log\,(1-.06824588)}{Log\,1.0041666} \quad -n = \frac{Log\,.931754119}{Log\,1.0041666} \quad -n = \frac{-.030698678}{.00180577} \quad -n = -17.000$$

Caso c.- Con los siguientes datos, calcular *Rp* y comprobar con "-n":

VPN = $550,000.00
i=5.5%=.055 anual (ordinario)
m=15 días
n=24 pagos fijos
k= se da una prórroga de 2.5 meses (2.5*30/15= **5 periodos**)
Rp =?

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}} \quad RP = \frac{550000}{\frac{1-(1+\frac{.055}{360}*15)^{-24}}{\frac{.055}{360}*15\,(1+\frac{.055}{360}*15)^{5-1}}} \quad RP = \frac{550000}{\frac{1-(1.0022916)^{-24}}{.0022916\,(1.0022916)^{5-1}}}$$

$$RP = \frac{550000}{\frac{1-.9465462}{.0022916\ (1.0091979)}} \quad RP = \frac{550000}{\frac{.0534538}{.0023126}} \quad RP = \frac{550000}{23.1141572} \quad RP = 23,794.9407$$

COMPROBACIÓN:

$$-n = \frac{Log\ 1-(\frac{VPN*\frac{i}{m}*(1+\frac{i}{m})^{k-1}}{RP})}{Log\ (1+\frac{i}{m})} \quad -n = \frac{Log\ 1-(\frac{550000*\frac{.055}{360}*15*(1+\frac{.055}{360}*15)^{5-1}}{23,794.9407})}{Log\ (1+\frac{.055}{360}*15)}$$

$$-n = \frac{Log\ 1-(\frac{550000*.0022916*1.0091982}{23,794.9407})}{Log\ 1.0022916} \quad -n = \frac{Log\ 1-(\frac{1271.973227}{23,794.9407})}{Log\ 1.0022916}$$

$$-n = \frac{Log\ (1-.0534556)}{Log\ 1.0022916} \quad -n = \frac{Log\ .9465444}{Log\ 1.0022916} \quad -n = \frac{-.0238590}{.0009940} \quad -n = -24$$

Caso d.- Con los siguientes datos, calcular *Rp* y comprobar con *VPN*:

VPN= $325,000.00
i=3.8 %=.038 anual (ordinario)
m=20 días
n=18 pagos fijos
k= se da una prórroga de 3.5 meses (3.5*30/20=**5**)
Rp=?

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}} \quad RP = \frac{325000}{\frac{1-(1+\frac{.038}{360}*20)^{-18}}{\frac{.038}{360}*20(1+\frac{.038}{360}*20)^{5-1}}} \quad RP = \frac{325000}{\frac{1-(1.0021111)^{-18}}{.00211115(1.0021111)^{5-1}}}$$

$$RP = \frac{325000}{\frac{1-.9627516}{.0021111\ (1.0084711)}} \quad RP = \frac{325000}{\frac{.0372484}{.0021289}} \quad RP = \frac{325000}{17.4965475} \quad RP = 18{,}575.09317$$

COMPROBACIÓN:

$$VPN = RP\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}} \quad VPN = 18{,}575.09317\frac{1-(1+\frac{.038}{360}*20)^{-18}}{\frac{.038}{360}*20\ (1+\frac{.038}{360}*20)^{5-1}}$$

$$VPN = 18{,}575.09317\frac{1-.9627516}{.0021111\ (1.0021111)^{5-1}} \quad VPN = 18{,}575.09317\frac{.0372484}{.0021111(1.0084711)}$$

$$VPN = 18{,}575.09317\frac{.0372484}{.0021289} \quad VPN = 18{,}575.09317(17.4965475)$$

$$VPN = 325{,}000$$

Caso e.- Con los siguientes datos, calcular *Rp* y comprobar con *"-n"*:

VPN = $100,000.00
i=4.2%=.042 anual
m=mensualmente
n=18 pagos fijos
k=se da una prórroga de 1.5 meses (1.5*30/30=**1.5**)
Rp =?

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}} \qquad RP = \frac{100000}{\frac{1-(1+\frac{.042}{12})^{-18}}{\frac{.042}{12}(1+\frac{.042}{12})^{1.5-1}}}$$

$$Rp = \frac{\$100,000}{1-(1.0035)^{-18} \Big/ .0035(1.0035)^{1.5-1}} \qquad RP = \frac{100000}{\frac{1-.939046757}{.0035\ (1.001748471)}} \qquad RP = \frac{100000}{\frac{.0609532}{.00350611}}$$

$$RP = \frac{100000}{17.3849291} \qquad RP = 5,752.108589$$

COMPROBACIÓN:

$$-n = \frac{Log\,1-\left(\frac{VPN * \frac{i}{m} * (1+\frac{i}{m})^{k-1}}{RP}\right)}{Log\,(1+\frac{i}{m})} \qquad -n = \frac{\text{Log}\,1-\left(\frac{100000 * \frac{.042}{12} * (1+\frac{.042}{12})^{1.5-1}}{5,752.108589}\right)}{\text{Log}\,(1+\frac{.042}{12})}$$

$$-n = \frac{\text{Log}\,1-\left(\frac{100000 * .0035 * 1.001748471}{5,752.108589}\right)}{\text{Log}\,1.0035} \qquad -n = \frac{\text{Log}\,1-\left(\frac{350.611965}{5,752.108589}\right)}{\text{Log}\,1.0035}$$

$$-n = \frac{\text{Log}\,(1-.060953641)}{\text{Log}\,1.0035} \qquad -n = \frac{\text{Log}\,.939046358}{\text{Log}\,1.0035} \qquad -n = \frac{-.0273129}{.0015173} \qquad -n = -18$$

Caso f.- Con los siguientes datos, calcular *Rp* y comprobar *"-n"*:

CON LOS SIGUIENTES DATOS CALCULAR Rp:

- VPN= $238,000.00
- Una tasa del 16% capitalizable cada 25 días
- Se pactan 40 pagos fijos mensuales
- Finalmente se da un diferimiento de 2 meses.
- UTILIZAR INTERES EXACTO.

Primeramente calculamos k-1

$$i = \frac{.16}{365} * 25 = .0109589 \qquad k = 2 * 30\ dias = \frac{60}{25} = 2.4$$

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{k-1}}} \quad RP = \frac{238{,}000}{\frac{1-(1+.0109589)^{-40}}{.0109589(1+.0109859)^{2.4-1}}} \quad RP = \frac{238{,}000}{\frac{1-.6466361}{.0109859(1.0154139)}}$$

$$RP = \frac{238{,}000}{\frac{.3533639}{.0111552}} \quad RP = \frac{238{,}000}{31.6770564} \quad RP = 7{,}513.32437$$

$$\boxed{RP = 7{,}513.324376}$$

COMPROBACIÓN

$$-n = \frac{\log\left(1-\frac{VPN*(i)(1+i)^{k-1}}{RP}\right)}{\log(1+i)} \quad -n = \frac{\log\left(1-\frac{238{,}000*(.0109859)(1+.0109859)^{2.4-1}}{7{,}513.324376}\right)}{\log(1.0109859)}$$

$$-n = \frac{\log\left(1-\frac{238{,}000*(.0109859)(1.0154139)}{7{,}513.324376}\right)}{\log(1.0109859)} \quad -n = \frac{\log\left(1-\frac{238{,}000*.0111552}{7{,}513.324376}\right)}{\log(1.0109859)}$$

$$-n = \frac{\log\left(1-\frac{2654.94236}{7{,}513.324376}\right)}{\log(1.0109859)} \quad -n = \frac{\log 1-.3533645}{\log(1.0109859)} \quad -n = \frac{\log .6466355}{\log(1.0109859)} \quad -n = \frac{-.1893404}{.0047450}$$

$$-n = -39.9031520$$

$$\boxed{-n = -40\ pagos\ mensuales}$$

Caso g.- Con los siguientes datos, calcular Rp y comprobar "-n":

CON LOS SIGUIENTES DATOS CALCULAR Rp:

- VPN= $55,000.00
- Una tasa del 12% capitalizable cada 18 días
- Se pactan 20 pagos fijos mensuales
- Finalmente se da un diferimiento de 4 meses.
- UTLIZAR INTERES ORDINARIO.

$$i = \frac{.12}{360} * 18 = .006 \qquad k = 4 * 30\, dias = \frac{120}{18} = 6.6666667$$

$$RP = \frac{VPN}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i(1+i)^{k-1}}} \quad RP = \frac{55{,}000}{\frac{1-(1+.006)^{-20}}{.006(1+.006)^{6.6666667-1}}} \quad RP = \frac{55{,}000}{\frac{1-.8872385}{.006(1.0344795)}}$$

$$RP = \frac{55{,}000}{\frac{.1127615}{.0062068}} \quad RP = \frac{55{,}000}{18.1674131}$$

$$\boxed{RP = 3{,}027.398546}$$

COMPROBACIÓN

$$-n = \frac{\log\left(1 - \frac{VPN*(i)(1+i)^{k-1}}{RP}\right)}{\log(1+i)} \quad -n = \frac{\log\left(1 - \frac{55{,}000*(.006)(1+.006)^{6.6666667-1}}{3{,}027.398546}\right)}{\log(1.006)}$$

$$-n = \frac{\log\left(1 - \frac{55{,}000*(.006)(1.0344795)}{3{,}027.398546}\right)}{\log(1.006)} \quad -n = \frac{\log\left(1 - \frac{55{,}000*.0062068}{3{,}027.398546}\right)}{\log(1.006)}$$

$$-n = \frac{\log\left(1 - \frac{341.374}{3{,}027.398546}\right)}{\log(1.006)} \quad -n = \frac{\log\ 1-.1127614}{\log(1.006)} \quad -n = \frac{\log\ .8872386}{\log(1.006)}$$

$$-n = \frac{-.0519595}{.0025979} \quad -n = -20.0005773$$

$$\boxed{-n = -20\ pagos\ mensuales}$$

Ejercicios para resolver

1.- CON LOS SIGUIENTES DATOS CALCULAR *Rp*:

- VPN= $1'055,000.00
- Una tasa del 22.5% capitalizable cada 28 días
- Se pactan 50 pagos fijos mensuales
- Finalmente se da un diferimiento de 5 meses.
- UTILIZAR INTERES ORDINARIO.

Comprobar con VPN, "i", "-n"

2.- CON LOS SIGUIENTES DATOS CALCULAR *Rp*:

- VPN= $127,500.00
- Una tasa del 13.5% capitalizable cada 16 días
- Se pactan 120 pagos fijos mensuales
- Finalmente se da un diferimiento de 2.5 meses.
- UTILIZAR INTERES EXACTO.

Comprobar con VPN, "i", "-n"

3.- CON LOS SIGUIENTES DATOS CALCULAR *Rp*:

- VPN= $111,111.10
- Una tasa del 5.55% capitalizable cada 12 días
- Se pactan 70 pagos fijos mensuales
- Finalmente se da un diferimiento de 1.5 meses.
- UTILIZAR INTERES EXACTO.

Comprobar con VPN, "i", "-n"

5.1.4.- GENERALES

Entramos a una modalidad de anualidades que por sus características particulares, son utilizadas con menor frecuencia en la actividad financiera y comercial. Esto es, los pagos o abonos no coinciden con la capitalización, de ahí que tengamos que calcular tasas equivalentes.

Las características de este tipo de anualidades son:

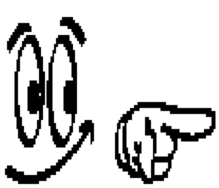
- El plazo inicia con la firma del convenio o apertura de cuenta de ahorros o inversión (en su caso)
- Las capitalizaciones no coinciden con el intervalo de pago
- Se conoce desde la firma del convenio, las fechas de inicio y término del plazo de la anualidad

Con estas consideraciones, ***¿qué hacer entonces cuando la tasa que se nos otorga, no coincide con la capitalización?***

En el desarrollo de este tema, se dará respuesta a esta interrogante:

5.1.4.1.- Variables que se utilizan en este apartado:

VPN: Valor Presente Neto (de un conjunto de pagos o abonos)
VF ó M: Valor Futuro o Monto (de la suma de unos pagos o abonos)
A ó Rp: Anualidad o Renta periódica (cuota uniforme o anualidad)
m: Capitalización (por su tipo de capitalización, mensual, bimestral etc., la tasa se divide entre el tipo de capitalización: ejemplo de ello si tenemos una tasa nominal del 12% capitalizable mensualmente = (12%/12)
n: Tiempo
$\bar{i}$: Tasa de Interés equivalente (la tasa que integra el factor de acumulación o descuento $(1+\bar{i})$:



RECUERDE: En la representación *i/m*, se refiere a la tasa nominal que se divide entre el número de meses dependiendo la capitalización. POR LO ANTERIOR El lector podrá encontrar indistintamente la tasa en su forma ***i* ó en su forma *i/m.***

5.1.4.2.- Procedimiento:

Para calcular el monto o valor futuro de una serie de pagos o abonos, el pago periódico, la tasa y el tiempo, utilizaremos las siguientes fórmulas:

Su monto: $$VF = Rp\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}/m} \quad \text{ó} \quad M = A\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}/m}$$

Siguiendo el mismo esquema que las anualidades ordinarias, recordaremos que es muy probable que las tasas de interés cambien en el lapso del período, ante ello debemos realizar cálculos parciales utilizando tasas equivalentes para: VF_1, VF_2, VF_n, conforme cambien las tasas, de acuerdo a la siguiente notación:

Para una primera tasa: $$VF_1 = Rp\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}/m},$$

Para una siguiente tasa:

$$VF_2 = VF_1(1+\bar{i}/m)^{n/m} + Rp\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}}$$

Y así sucesivamente

$$VF_n = VF_2(1+\bar{i}/m)^{n/m} + Rp\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}}$$

La Anualidad o Renta Periódica:

$$Rp = \frac{VF}{\left[\frac{(1+\bar{i}/m)^{n/m}-1}{\bar{i}}\right]} \quad \text{ó} \quad A = \frac{M}{\left[\frac{(1+\bar{i}/m)^{n/m}-1}{\bar{i}}\right]}$$

Su valor presente:

$$VPN = Rp\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n/m}}{\bar{i}/m} \qquad \text{Se despeja} \qquad Rp = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\bar{i}/m)^{-n/m}}{\bar{i}/m}}$$

Para calcular el tiempo *"n"*

$$VF = Rp\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} \qquad \text{ó} \qquad Rp\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = VF$$

Pasa dividiendo *Rp* $$\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = \frac{VF}{Rp}$$

La *i/m* pasa multiplicando $$(1+\bar{i}/m)^{n/m}-1 = \left[\left(VF/Rp\right)*\bar{i}\right]$$

Y la unidad pasa sumando $$(1+\bar{i}/m)^{n/m} = \left[\left(VF/Rp\right)*\bar{i}\right]+1$$

Ahora aplicamos logaritmos

$$\log((1+\bar{i}/m)^{n/m}) = \log\left[\left(VF/Rp\right)*\bar{i}\right]+1$$

Y se despeja $$n/m = \frac{Log\left[\left(VF/Rp\right)*\bar{i}\right]+1}{Log(1+\frac{\bar{i}}{m})}$$ así de simple

Para calcular el tiempo *"-n"* en valor presente neto

De la fórmula $VPN = Rp\dfrac{1-(1+\bar{i}/m)^{-n/m}}{1+\bar{i}/m}$ tenemos que $\dfrac{VPN * \bar{i}/m}{Rp} = 1-(1+\bar{i}/m)^{-n/m}$

Para despejar *–n/m* $(1+\bar{i}/m)^{-n/m} = 1-\left[\dfrac{NPV * \bar{i}/m}{Rp}\right]$

Así obtenemos $Log((1+\bar{i}/m)^{-n/m}) = Log(1-\left[\dfrac{NPV * \bar{i}/m}{Rp}\right])$

Despejamos *"-n/m"*, y ahora tenemos la siguiente expresión

$$-n/m = \frac{Log(1-\left[\dfrac{NPV * \bar{i}/m}{Rp}\right])}{Log(1+\bar{i}/m)}$$

Para calcular la tasa de interés *"$i_{equivalente}$"*

En Valor Futuro o Monto

Del monto $VF = Rp\dfrac{(1+\dfrac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}}$ tenemos que $Rp\dfrac{(1+\dfrac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = VF$ *Rp* pasa dividiendo al lado derecho $\dfrac{(1+\dfrac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = VF/Rp$

Y para calcular *i*, se hace al tanteo, equiparando el factor resultante de: *VF/Rp*

En Valor Presente Neto

Del valor presente $$Rp = \frac{VPN}{\dfrac{1-(1+\bar{i}/m)^{-n/m}}{\bar{i}}}$$

Despejamos $$\frac{1-(1+\bar{i}/m)^{-n/m}}{\bar{i}} = VPN/Rp$$

Y para calcular *i equivalente*, se hace al tanteo, equiparando el factor resultante de *VPN/Rp*

En ambos casos se sugiere tener elaborada una tabla proforma, con valores de tasas que van de 1.5% a 9.5% (0.015 a 0.095)

La *n* se manipula como variable input

La *Î* se manipula como variable input

Estos son los factores, el cual se buscara equiparar al resultado de *VPN/Rp*

n	***i***	$\dfrac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n/m}}{\bar{i}/m}$	**Factor**
6	0.015	0.91454219	5.69718716
	0.025	0.86229687	5.50812536
	0.035	0.81350064	5.32855302
	0.045	0.76789574	5.15787248
	0.055	0.72524583	4.99553030
	0.065	0.68533412	4.84101355
	0.075	0.64796152	4.69384642
	0.085	0.61294509	4.55358717
	0.095	0.58011659	4.41982537
al tanteo	**0.0499**	0.74664195	5.07731567

5.1.4.3.- Ejercicios resueltos

Resolvamos un ejercicio de Anualidad general:

Consideramos el caso de una persona que vende calzado por catálogo y por sus ventas se ha hecho acreedora a un incentivo bimestral de $250.00. A partir de este premio decide aperturar una cuenta de ahorro la cual le ofrece una tasa de interés mensual del 1.5% capitalizable mensualmente, con la salvedad que debe incrementar el saldo de la misma, con una cantidad similar al de apertura y con la frecuencia en que recibirá su incentivo. Además no podrá retirar de su saldo vigente, cantidad alguna al menos durante el primer año.

Si dicha persona sigue al pie de la letra las instrucciones, ahora la pregunta es: *¿Cuánto acumulará la vendedora de calzado al cabo de 3 años siguiendo este esquema de ahorro?*

Utilizamos la fórmula del monto de un conjunto de abonos (cuotas uniformes):

$$M = A\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n}-1}{\bar{i}/m}$$

Posterior a ello, considerar los siguientes aspectos:

a.- En primer término debemos identificar la tasa equivalente a la tasa capitalizable que ofrece la cuenta de ahorros. Si tenemos una tasa mensual de 1.5% mensual con capitalización igual, entonces debemos calcular una tasa bimestral que sea equivalente.

b.- Determinar el número de depósitos que se realizarán en tres años.

c.- Trazar una línea de tiempo para visualizar la frecuencia de los depósitos

Solución:

a.- Para determinar la tasa equivalente, tomamos la expresión

$$TE = \left[(1 + {}^{i}\!/\!{}_{m})^{n/m} - 1\right] * 100$$

***nota:** el exponente *n/m*, se utiliza cuando tenemos una tasa nominal, de ahí que sea necesario dividirla entre el tipo de capitalización. Caso contrario, se hace el cálculo directo, es decir, cuando nos dan la tasa capitalizable, como lo fue en este caso para este ejercicio.

Como la tasa que se nos da, esta referenciada mensualmente, entonces ahora tenemos que la tasa del 1.5% mensual, es equivalente a:

$$TE = \left[(1.015)^2 - 1\right] * 100 \qquad TE = 3.0225\_bimestral$$

De donde sale la tasa del 3.0225% bimestral:

Del factor de acumulación $(1+i)^n = (1+.015)^2 + (1+.015)^{2*2}$ $\_\_\_el\_múltiplo\_es\_2$

Para nuestro ejemplo tendríamos que:

$$250(1.015)^2 + 250[(1.015)^2]^2 + 250[(1.015)^2]^3 \ldots\ldots\ldots\ldots + 250[(1.015)^2]^n$$

Entonces: $TE = \left[(1.015)^2 - 1\right] * 100 = 3.0225$ es la tasa bimestral equivalente a la tasa del 1.5% mensual

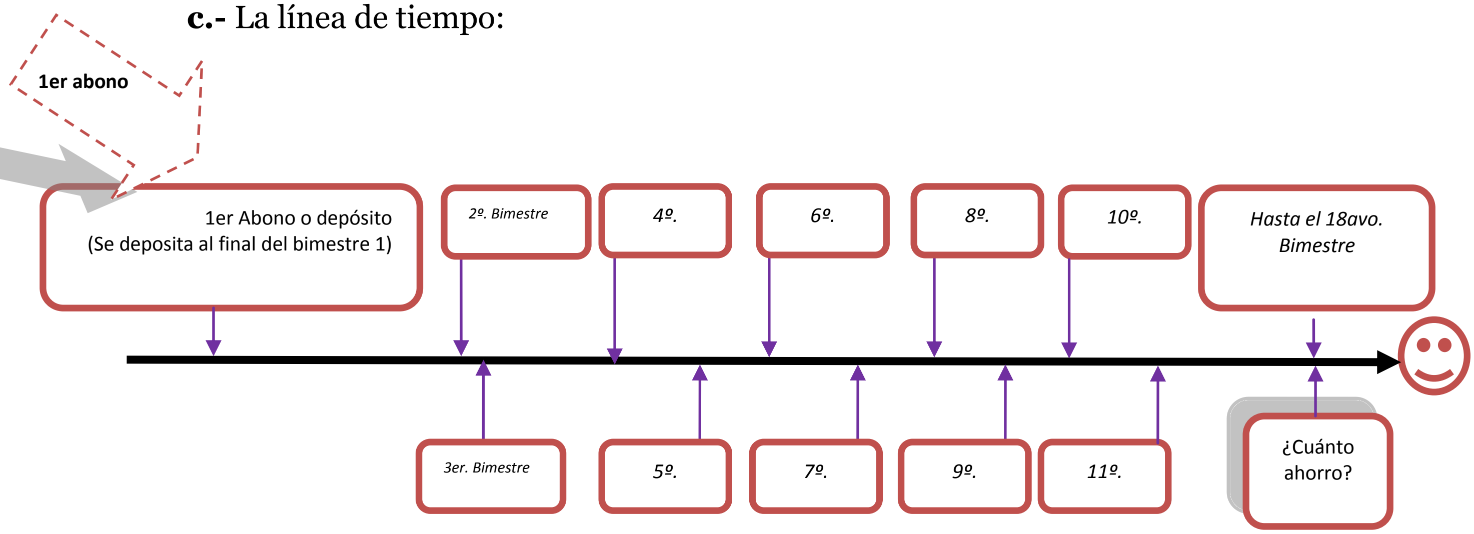
b.- Si son seis bimestres por año, entonces en tres años son 18 bimestres (6*3), lo que es igual a 18 abonos o depósitos iguales en la cuenta de inversión o ahorro.

Cada depósito se multiplica por su factor de acumulación y se eleva a la potencia según el tiempo acumulado, siendo al final del último depósito, el que no acumulará interés alguno, ya que no devenga ningún interés.

Si vemos la siguiente expresión, el primer depósito no acumula interés, hasta que se realiza el siguiente depósito que acumula un bimestre de intereses devengados y el segundo depósito ahora no genera interés alguno y así sucesivamente.

$$250 + 250(1.015)^2 + 250(1.015)^4 + ...250(1.015)^{2n}$$

c.- La línea de tiempo:



Como ya calculamos la Tasa Equivalente del 1.5% mensual a bimestral (3.0225%), además sabemos que en tres años son 36 meses y si lo dividimos entre dos (por ser bimestral) obtenemos 18 bimestres, que es lo mismo a decir, que en un año son 6 bimestres y en tres serían 18.

Ahora la solución es:

$$M = A\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m} - 1}{\bar{i}/m} \qquad M = \$250.00\frac{(1.030225)^{(3*12)/2} - 1}{0.030225}$$

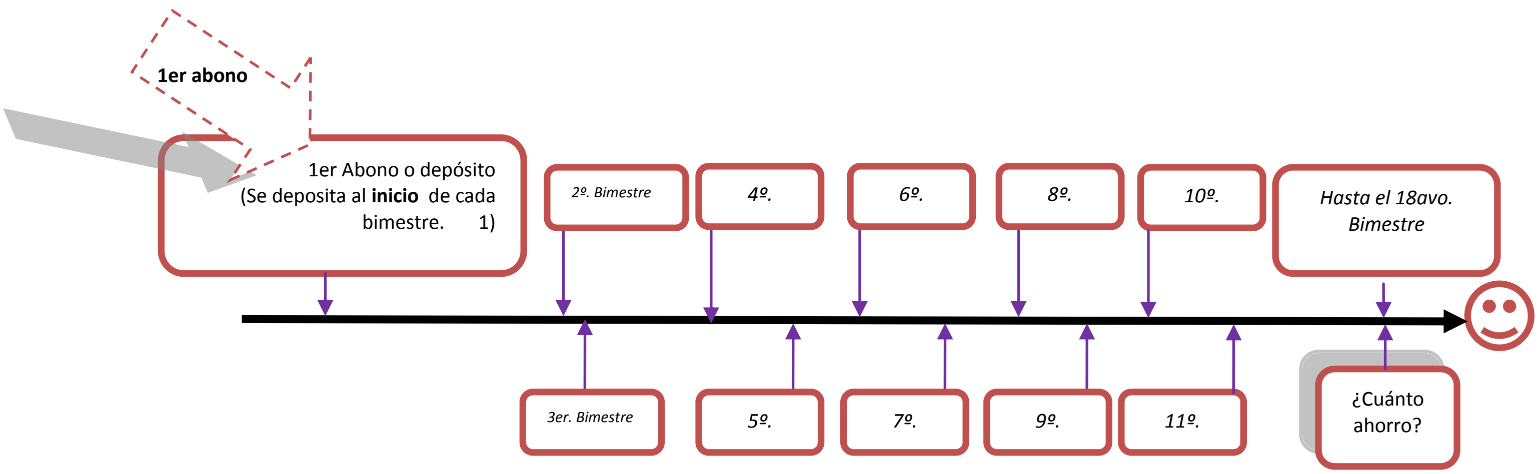
$$M = \$250.00\frac{(1.030225)^{18} - 1}{0.030225} \qquad M = \$250.00\frac{(1.709139538) - 1}{0.030225}$$

$$M = \$250.00\frac{.709139538}{0.030225} \qquad M = \$250.00(23.46201945) \qquad M = \$5{,}865.50$$

Este es el monto que acumulará la vendedora de calzado, al cabo de 3 años siguiendo el esquema de ahorro bajo el supuesto de anualidad ordinaria vencida (solo para efectos de razonamiento matemático, ya que esto no es así en la vida real)

Si fuera el mismo caso, pero ahora el esquema cambia, los depósitos se realizan al inicio de cada período. Entonces debemos asumir que tiene un comportamiento de anualidad anticipada:

La línea de tiempo se representa de la siguiente forma:



La solución es:

De la fórmula del monto de una anualidad anticipada general sabemos que:

$$M = A\left(1+\frac{\bar{i}}{m}\right)\frac{\left(1+\frac{\bar{i}}{m}\right)^{n/m}-1}{\bar{i}/m} \qquad M = \$250.00(1.030225)\frac{(1.030225)^{(3*12)/2=18}-1}{0.030225}$$

$$M = 250.00(1.030225)\frac{(1.70913954)-1}{0.030225} \qquad M = \$250.00(1.030225)\frac{.70913954}{0.030225}$$

$$M = \$250.00(1.030225)(23.46201945)$$

$$M = \$250.00(24.17115899) \qquad M = \$6{,}042.79$$

Este es el monto que acumulará la vendedora de calzado, al cabo de 3 años siguiendo el esquema de ahorro con depósitos anticipados.

Ahora realicemos algunas comprobaciones, tan solo para corroborar el resultado:

Comprobación: Con los datos de la **Anualidad Anticipada** realizar el cálculo de "*A*", "*i*" y "*n*"

Para conocer "*A*":

De: $M = A(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}/m}$ despejamos *A* y obtenemos:

$$A = \frac{M}{(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}/m}} \qquad A = \frac{\$6,042.79}{(1.030225)\frac{(1.030225)^{(3*12)/2=18}-1}{0.030225}}$$

$$A = \frac{\$6,042.79}{(1.030225)\frac{(1.70913954)-1}{0.030225}} \qquad A = \frac{\$6,042.79}{(1.030225)\frac{.70913954}{0.030225}}$$

$$A = \frac{\$6,042.79}{(1.030225)(23.46201945)} \qquad A = \frac{\$6,042.79}{(24.17115899)} = \$250.00$$

Para conocer *"i equivalente"*:

Del monto $VF = Rp(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}}$ tenemos que $Rp(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = VF$

Rp pasa dividiendo al lado derecho $(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = VF/Rp$

$$(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n/m}-1}{\bar{i}} = \$6,042.79/\$250.00$$

El factor es: 24.17116

Y para calcular *i*, se hace al tanteo, equiparando el factor resultante de: *VF/Rp*

En una tabla en Excel se calcula al tanteo y se obtiene el siguiente resultado:

n	i	$(1+\tilde{i})\dfrac{(1+\tilde{i})^{n}-1}{\tilde{i}}$	
18	0.01	1.19614748	19.81089504
	0.02	1.42824625	21.84055863
	0.03	1.70243306	24.11686844
	0.04	2.02581652	26.67122940
	0.05	2.40661923	29.53900391
	0.06	2.85433915	32.75999170
	0.07	3.37993228	36.37896479
	0.08	3.99601950	40.44626324
	0.09	4.71712042	45.01845839
al tanteo	**0.030225**	**1.70913954**	**24.17115900**

MENU

Notas:

Solo utilizar las celdas amarillas

$$S = R(1+\tilde{i})\frac{(1+\tilde{i})^{n}-1}{\tilde{i}}$$

S	**$**	**6,042.79**		***24.1712***
R	**$**	**250.00**		

$$(1+\tilde{i})\frac{(1+\tilde{i})^{n}-1}{\tilde{i}} = S/R$$

TASA **24.171159**

0.0302

La tasa equivalente

$$TE = \left[(1+0.015)^{2}-1\right]*100$$

$$TE = \left[(1+0.015)^{2}-1\right]*100$$

$$TE = 3.0225\%$$

Para conocer "*n*":

De la fórmula $n/m = \dfrac{Log\left[\left(VF/Rp\right)*\bar{i}\right]+1}{Log(1+\dfrac{\bar{i}}{m})}$, obtenemos:

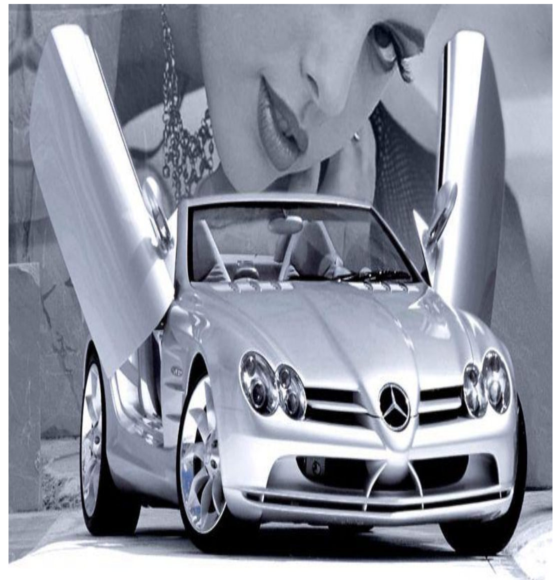
$$n/m = \frac{Log\left[\left(\$6{,}042.79/\$250.00\right)*.03\bar{0}225\right]+1}{Log(1.030225)} \quad n/m = \frac{Log\left[(24.17116)*.03\bar{0}225\right]+1}{Log(1.030225)}$$

$$n/m = \frac{Log\left[0.730573311\right]+1}{Log(1.030225)} \quad n/m = \frac{Log1.730573311}{Log\ 1.030225} = \frac{0.548452747}{0.029777225} = 18.41853118$$

	log Base 10	
1.73057331	0.23819	
1.030225	0.01293208	18.4185312

Cuando se tiene que tomar una decisión ante diferentes escenarios

Ejercicio: Supongamos que para cubrir el importe del seguro de su flamante Mercedes, una ejecutiva de importante empresa refresquera, se encuentra ante la disyuntiva siguiente:



a.- Pagar por adelantado el seguro de su auto, esto es, de contado debe cubrir la cantidad de $17,430.00

b.- Tomar la opción de liquidarlo en pagos anticipados semestrales o trimestrales, asumiendo un gravamen financiero del 2.5% mensual para el primer esquema y del 1.15% mensual para el otro esquema.

La pregunta es: ¿Cuándo debe pagar esta bella ejecutiva, en cada uno de los escenarios planteados?

La solución es:

De la fórmula del monto de una anualidad anticipada general sabemos que:

$$M = A(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n}-1}{\bar{i}/m}$$

Para conocer el valor de cada pago, ahora se sustituye *A* (*abono-anualidad*) por *Rp (pago periódico)*, y se modifica el factor de

$$\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n}-1}{\bar{i}/m}$$

Por $1-\frac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m}$, resultando: $M = Rp(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m}$ esta es la expresión de inicio.

Para el desarrollo del ejercicio, primero tenemos que convertir las tasas de referencia, en sus tasas equivalentes de acuerdo al período de capitalización:

Tasa de referencia	Procedimiento	Resultado: tasa equivalente
2.5% mensual para el plan semestral	$TE = \left[(1.025)^6 - 1\right] * 100$	**15.969%**
1.15% mensual para el plan trimestral	$TE = \left[(1.0115)^3 - 1\right] * 100$	**3.4898%**

Escenario b.- Pagos semestrales

$$\$17{,}430.00 = Rp(1.15969)\frac{1-(1.15969)^{-2}}{0.15969} \quad \$17{,}430.00 = Rp(1.15969)\frac{1-(0.74356027)}{0.15969}$$

$$\$17{,}430.00 = Rp(1.15969)\frac{0.25643973}{0.15969} \quad \$17{,}430.00 = Rp(1.15969)(1.605859666)$$

$$\$17{,}430.00 = Rp(1.862299396) \quad Rp = \frac{\$17{,}430.00}{1.86225954} \quad Rp = \$9{,}359.59$$

Escenario b.- Pagos trimestrales

$$\$17{,}430.00 = Rp(1.034898)\frac{1-(1.034898)^{-4}}{0.034898} \quad \$17{,}430.00 = Rp(1.034898)\frac{1-(0.87178584)}{0.034898}$$

$$\$17{,}430.00 = Rp(1.034898)\frac{0.12821416}{0.034898} \quad \$17{,}430.00 = Rp(1.034898)(3.673968709)$$

$$\$17{,}430.00 = Rp(3.802182869) \quad Rp = \frac{\$17{,}430.00}{3.8021829} \quad Rp = \$4{,}584.21$$

Resumen:

Contado	$17,430.00
Escenario b: 2 pagos semestrales anticipados de $9,359.59	$18,719.18
Escenario b: 4 pagos trimestrales anticipados de $4,584.21	$18,336.84

Si la ejecutiva invierte los $17,430.00 los primeros tres meses y luego a los 6 meses considerando una tasa intermedia del 1.5% mensual

$$S = P(1+i)^n \qquad S = \$17,430.00(1.015)^3$$

$$S = \$17,430.00(1.045678) = \$18,226.17$$

$$S = P(1+i)^n \; S = \$17,430.00(1.015)^6$$

$$S = \$17,430.00(1.093443) = \$19,058.72$$

Que le convendría a la ejecutiva:

¿Pagar de contado?,

¿Invertirlo los primeros 3 o 6 meses?

Ejemplo:

El importe de lo que pagaría de contado en caso de que lo tuviera disponible, invertido a 6 meses le podría generar un monto de:	\$19,058.72
Escenario b: 2 pagos semestrales anticipados de \$9,359.59	-\$9,359.59
Le restan	\$9,699.13
Esa misma cantidad la invierte otros 6 meses y cubre el segundo pago y además le queda alguna utilidad. $S = \$9,699.13(1.015)^6$	\$10,605.45
Diferencia superavitaria descontando el pago que falta cubrir	\$906.32

Así pueden seguir los cálculos y tomar la mejor decisión, aunque debiera mejor vender ese carro………… no lo cree usted?

Ahora finalizaremos este tema, con la comprobación de la tasa. Para ello utilizaremos los mismos datos

De la opción b: con el esquema de pagos semestrales el importe de cada pago es de $9,359.59 y un valor neto de $17,430.00 que representa el importe del seguro, la pregunta es ahora: ¿Qué tasa mensual le fue cargada en su adeudo?

De la fórmula del Monto

$$M = Rp(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m}$$

Se transforma en VPN y cambiamos la fórmula a:

$$VPN = Rp(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m}$$

Entonces ahora tenemos que:

$$Rp(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m} = VPN$$

Pasa dividiendo el pago periódico (*Rp*) al lado derecho

$$(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m} = VPN/Rp \qquad (1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m} = \$17,430.00/\$9,359.59$$

$$(1+\frac{\bar{i}}{m})\frac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m} = 1.86226106$$

Ahora recurrimos a una tabla en Excel que previamente habremos diseñado, para ensayar con diferentes valores:

ANUALIDAD GENERAL (Modo Anticipado)

Calcular i en Valor presente

MENU

n	i	$(1+\frac{i}{m})\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{i/m}=\frac{VPN}{Rp}$	
2	0.01	0.980296	1.9900990099
	0.02	0.961169	1.9803921569
	0.03	0.942596	1.9708737864
	0.04	0.924556	1.9615384615
	0.05	0.907029	1.9523809524
	0.06	0.889996	1.9433962264
	0.07	0.873439	1.9345794393
	0.08	0.857339	1.9259259259
	0.09	0.841680	1.9174311927
al tanteo	**0.15969**	**0.743560**	**1.8622994076**

Notas:

Solo utilizar las celdas amarillas

$$NPV = R(1+\tilde{i}/m)\left(\frac{1-(1+\tilde{i})^{-n}}{\tilde{i}}\right)$$

$$NPV/R = (1+\tilde{i}/m)\left(\frac{1-(1+\tilde{i})^{-n}}{\tilde{i}}\right)$$

$$(1+\tilde{i}/m)\left(\frac{1-(1+\tilde{i})^{-n}}{\tilde{i}}\right) = NPV/R$$

NPV	**$ 17,430.00**	***1.862261061***
R	**$ 9,359.59**	

TASA **1.862299408**

0.1597

Tasa de referencia	Procedimiento	Resultado: tasa equivalente
2.5% mensual para el plan semestral	$TE=\left[(1.025)^{6}-1\right]*100$	**15.969%**

La comprobación es:

Elevando ambos lados a 1/6 $(1+\frac{\bar{i}}{m})^{1/6} = (1.15969)^{1/6}$ obtenemos: 1.024999496 que es lo mismo a 2.5%

FORMULARIOS PARA EL CÁLCULO DE LAS ANUALIDADES:

Anualidades Ordinarias (pagos vencidos)

Valor Futuro VF	Tiempo en VF
$VF = Rp \dfrac{(1+\frac{i}{m})^n - 1}{i/m}$	$n = \dfrac{Log\left\lvert \left(VF/Rp\right) * i \right\rvert + 1}{Log(1+\frac{i}{m})}$
Valor de la cuota Periódica en VF	**Tasa en VF**
$Rp = \dfrac{VF}{\left[\dfrac{(1+ i/m)^n - 1}{i/m}\right]}$	$\dfrac{(1+\frac{i}{m})^n - 1}{i/m} = VF/Rp$
Valor Presente VPN	**Tiempo en VPN**
$VPN = Rp \dfrac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{i/m}$	$-n = \dfrac{Log(1-(\frac{NPV * i/m)}{Rp})}{Log(1+ i/m)}$
Valor de la cuota Periódica en VPN	**Tasa en VPN**
$Rp = \dfrac{VPN}{\dfrac{1-(1+ i/m)^{-n}}{i/m}}$	$\dfrac{1-(1+ i/m)^{-n}}{i/m} = VPN/Rp$

Anualidades Anticipadas (pagos al inicio del periodo)

Valor Futuro VF	Tiempo en VF
$VF = Rp(1+i/m) \dfrac{(1+\frac{i}{m})^n - 1}{i/m}$	$n = \dfrac{Log\left\lvert \left(VF/Rp\right) * i/m \right\rvert + 1}{Log\left((1+i/m)(1+ i/m)\right)}$
Valor de la cuota Periódica en VF	**Tasa en VF**
$Rp = \dfrac{VF}{(1+i/m)\left[\dfrac{(1+ i/m)^n - 1}{i/m}\right]}$	$(1+ i/m)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^n - 1}{i/m} = VF/Rp$

Valor Presente VPN	Tiempo en VPN
$VPN = Rp(1+i/m)\dfrac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{i/m}$	$-n = \dfrac{Log(1-(\dfrac{NPV * i/m)}{Rp})}{Log(1+i/m)(1+i/m)}$
Valor de la cuota Periódica en VPN	**Tasa en VPN**
$Rp = \dfrac{VPN}{(1+i/m)\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}}$	$(1+i/m)\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m} = VPN/Rp$

Nota: Para calcular el VF, en una primera tasa

$$VF = Rp(1+i/m)\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$$

Después $VF_2 = VF_1(1+i/m)^{n} + Rp(1+i/m)\dfrac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$

Y así sucesivamente

$$VF_n = VF_2(1+i/m)^{n} + Rp(1+i/m)\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$$

Continúa.........

Anualidades Diferidas (pagos con diferimiento del tiempo)

Valor Futuro VF	Tiempo en VF
$$VF = Rp\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}$$	$$n = \frac{Log\left\|\left(\frac{M}{A}\right)*i/m\right\|+1}{Log(1+\frac{i}{m})}$$
Valor de la cuota Periódica en VF	**Tasa en VF**
$$Rp = \frac{VF}{\left[\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m}\right]}$$	$$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i/m} = \frac{M}{A}$$
Valor Presente VPN	**Tiempo en VPN**
$$VPN = Rp\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}$$	$$-n = \frac{Log(1-\frac{VPN*(\frac{i}{m})(1+\frac{i}{m})^{k-1}}{Rp}}{Log(1+\frac{i}{m})}$$
Valor de la cuota Periódica en VPN	**Tasa en VPN**
$$Rp = \frac{VPN}{\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}}}$$	$$\frac{1-(1+\frac{i}{m})^{-n}}{\frac{i}{m}(1+\frac{i}{m})^{k-1}} = \frac{VPN}{Rp}$$

Continúa…….

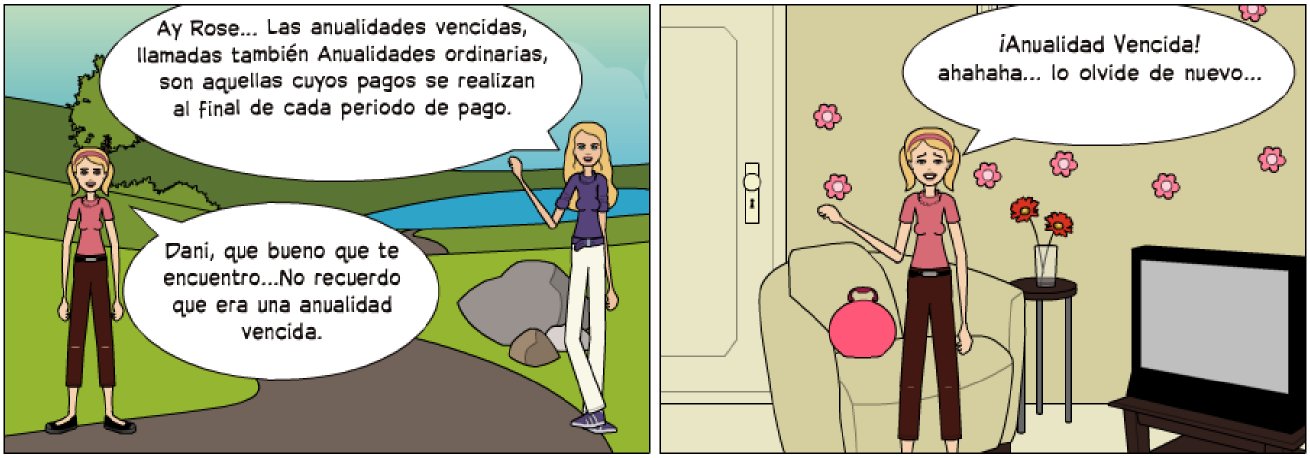
Anualidades Generales (se utilizan tasas equivalentes)

Valor Futuro VF	Tiempo en VF
$VF = Rp\dfrac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n}-1}{\bar{i}/m}$	$n = \dfrac{Log\left\lvert\left(VF/Rp\right)*\bar{i}\right\rvert+1}{Log(1+\frac{\bar{i}}{m})}$
Valor de la cuota Periódica en VF	**Tasa en VF**
$Rp = \dfrac{VF}{\left[\dfrac{(1+\bar{i}/m)^{n}-1}{\bar{i}}\right]}$	$\dfrac{(1+\frac{\bar{i}}{m})^{n}-1}{\bar{i}} = VF/Rp$
Valor Presente VPN	**Tiempo en VPN**
$VPN = Rp\dfrac{1-(1+\frac{\bar{i}}{m})^{-n}}{\bar{i}/m}$	$-n = \dfrac{Log(1-(\frac{NPV*\bar{i}/m)}{Rp}))}{Log(1+\bar{i}/m)}$
Valor de la cuota Periódica en VPN	**Tasa en VPN**
$Rp = \dfrac{VPN}{\dfrac{1-(1+\bar{i}/m)^{-n}}{\bar{i}/m}}$	$\dfrac{1-(1+\bar{i}/m)^{-n}}{\bar{i}} = VPN/Rp$

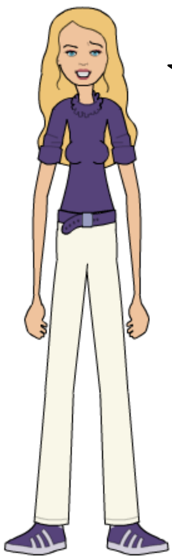
5.1.5.- A manera de repaso general

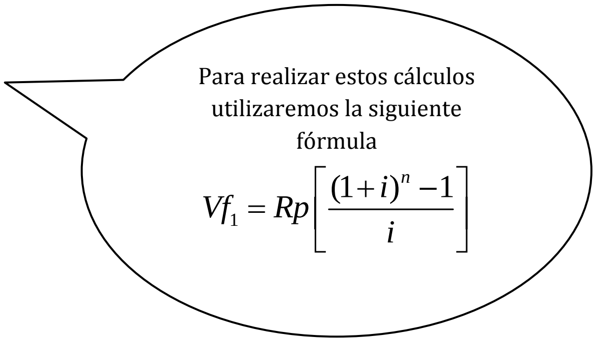
ANUALIDADES ORDINARIAS O VENCIDAS

Problema 1:



Al otro día en la escuela...





Contando con los siguientes Datos:

V_{F1} =?
R_P=2,000
i=9% anual (.09/12=0.0075)
n=(8años)*(12 meses)=96 meses

Sustituyendo la Fórmula:

$$V_{F1} = R_P\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{\frac{i}{m}}$$

$$V_{F1} = 2000\frac{\left(1+\frac{.09}{12}\right)^{96} - 1}{\frac{.09}{12}}$$

$$V_{F1} = 2000\frac{(1+0.0075)^{96} - 1}{0.0075}$$

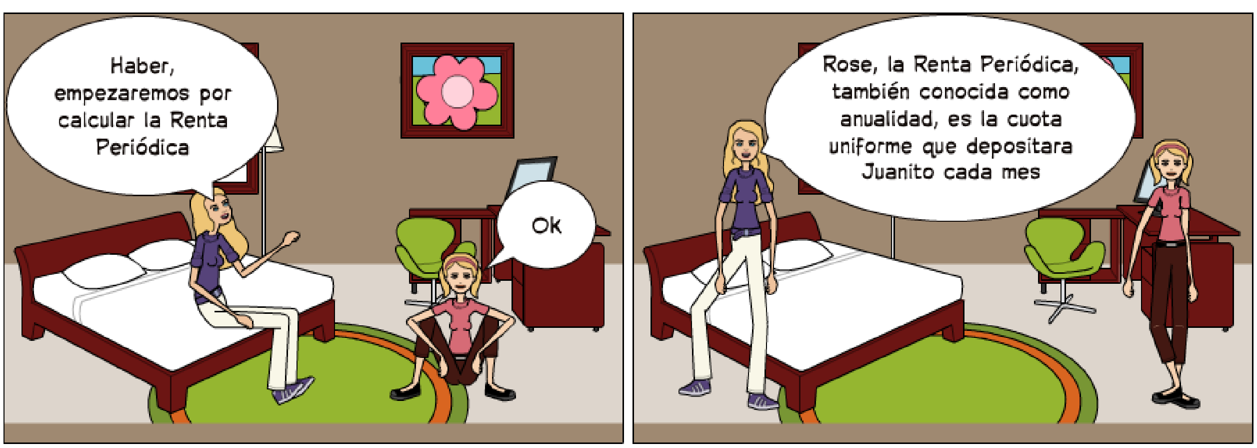
$$V_{F1} = 2000\frac{2.048921228 - 1}{0.0075}$$

$$V_{F1} = (2000)(139.8561637)$$

$$V_{F1} = \$279{,}712.3275$$

Con estos cálculos podemos conocer el Valor Futuro, sin embargo podemos realizar todos los despejes para confirmar que estamos bien en nuestras operaciones realizadas.

Más tarde, en casa de Rose...



Para calcular la Renta Periódica utilizaremos esta fórmula:

$$Rp = \frac{Vf}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}}$$

Contando con los siguientes Datos:

V_{F1} =\$279,712.3275
R_P=?
i=9% anual
n=(8años)*(12 meses)=96 meses

Sustituyendo la Fórmula:

$$Rp = \frac{\$279{,}712.3275}{\left[\frac{(1+.09/12)^{96} - 1}{.09/12}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$279{,}712.3275}{\left[\frac{(1+0.0075)^{96} - 1}{0.0075}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$279{,}712.3275}{\left[\frac{(1.0075)^{96} - 1}{0.0075}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$279{,}712.3275}{\left[\frac{2.048921228 - 1}{0.0075}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$279{,}712.3275}{\left[\frac{1.048921228}{0.0075}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$279{,}712.3275}{139.8561638}$$

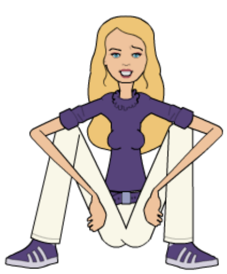
$$\boldsymbol{Rp = \$2{,}000.00}$$

Dani, tambien despejara *"n"* para conocer el número de plazos en que pagará Juanito.

Para calcular el número de periodos de la Anualidad Futura, utilizaras la siguiente fórmula:

$$n = \frac{Log\left[(Vf / Rp) * i\right] + 1}{Log(1+i)}$$

$$n = \frac{\log\left|\left(VF/_{Rp}\right) * i\right| + 1}{\log\left(1 + \frac{i}{m}\right)}$$



Contando con los siguientes Datos:
V_{F1} =\$279,712.3275
R_P=2,000
i=9% anual
n=?

Sustituyendo la Fórmula:

$$n = \frac{\log\left|\left(279{,}712.3275/_{2{,}000}\right) * 0.0075\right| + 1}{\log(1.0075)}$$

$$n = \frac{\log|(139.8561638) * 0.0075| + 1}{\log(1.0075)}$$

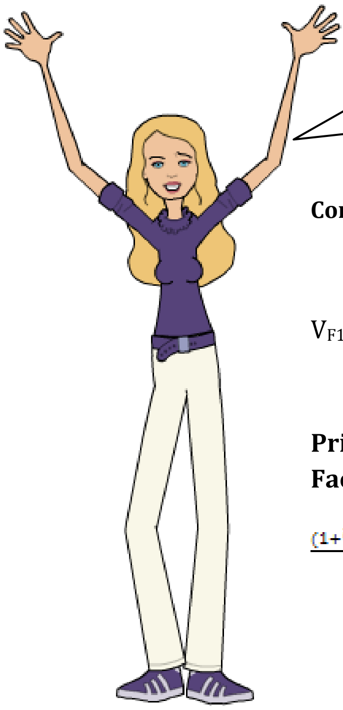
$$n = \frac{\log|(1.048921228)| + 1}{\log(1.0075)}$$

$$n = \frac{\log(2.048921228)}{\log(1.0075)}$$

$$n = \frac{0.311525262}{0.003245054}$$

$$\boldsymbol{n = 95.99999998 = 96}$$

Y por último para calcular la Tasa de Interés, Dani le explicará a Rose que existe una novedosa forma de calcularla por un método llamado "Al tanteo".



Por último podemos calcular la tasa de Interés al tanteo de la siguiente forma:

$$\frac{(1+i)^n-1}{i}=Vf/Rp$$

Contando con los siguientes Datos:

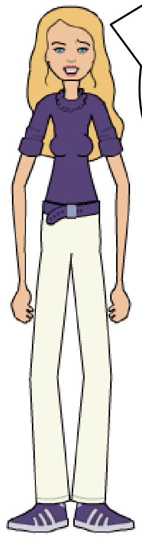
V_{F1} =$279,712.3275

Primero se debe calcular el Factor:

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}=279{,}712.3275/2{,}000$$

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}=\mathbf{139.8561638}$$

n	i	FACTOR
96	0.01	61.52770299
	0.02	42.52943386
	0.03	31.38121934
	0.04	24.42091884
	0.05	19.8151339
	0.06	16.60465325
	0.07	14.2641339
	0.08	12.49226911
	0.09	11.10827441
Al tanteo	0.0075	**139.8561638**



Juanito va a liquidar su deuda con pagos de $2,000.00 mensuales en un plazo de 8 años con una tasa de interés anual del 9%. Él desea conocer el valor presente de los pagos, esto es, el valor presente de la anualidad.

$$VPN = Rp\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Contando con los siguientes Datos:

VPN =?
R_P=$2,000.00
i=9% anual (.09/12=0.0075)
n=(8años)*(12 meses)=96 meses

$$VPN = R_p\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}$$

$$VPN = 2{,}000\frac{1-(1+0.0075)^{-96}}{0.0075}$$

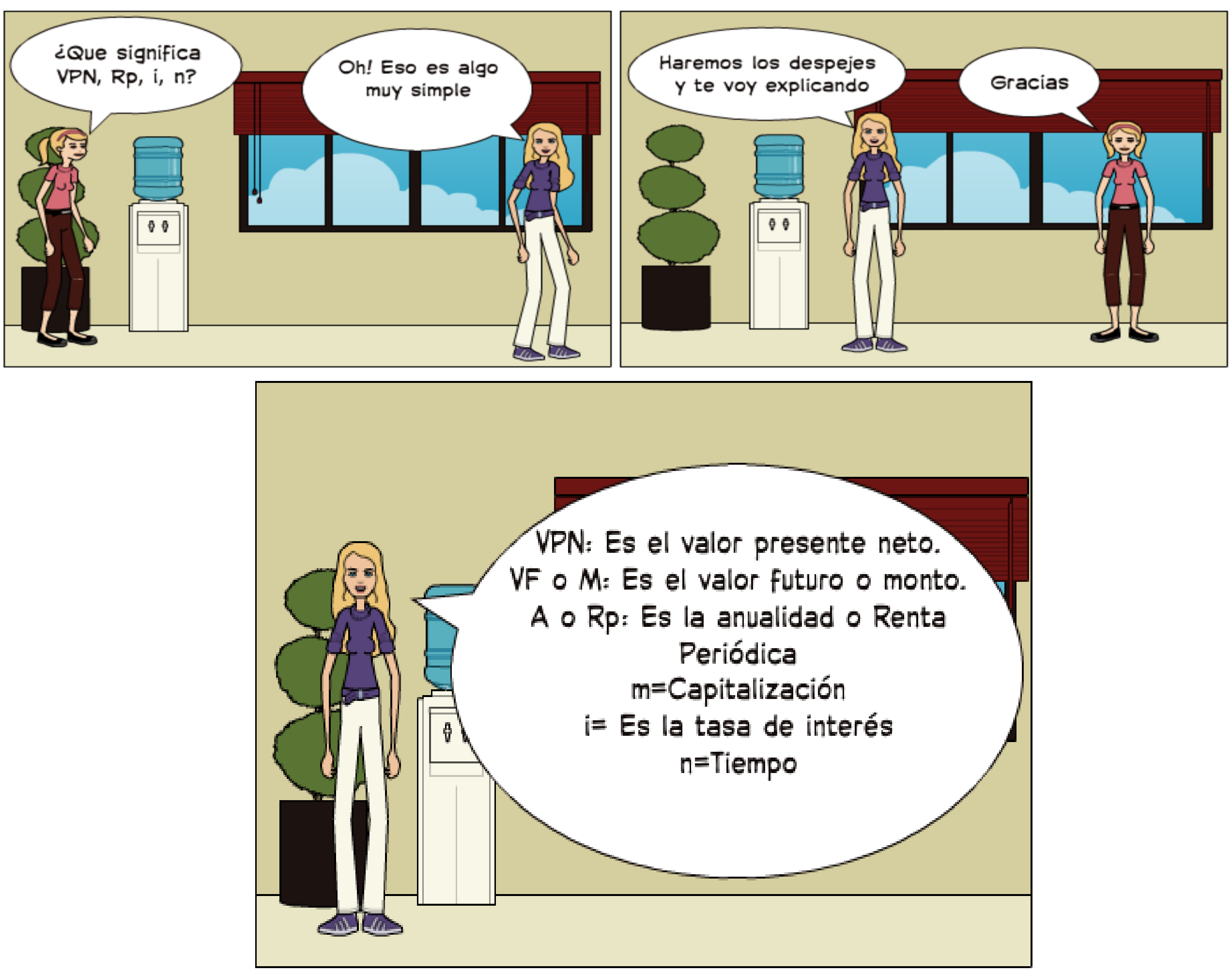
$$VPN = 2{,}000\frac{1-(1.0075)^{-96}}{0.0075}$$

$$VPN = 2{,}000\frac{1-0.48806171}{0.0075}$$

$$VPN = 2{,}000\frac{0.511938289}{0.0075}$$

$$VPN = (2{,}000)(68.25843853)$$

$$VPN = \$136{,}516.87$$



Para calcular la Renta Periódica utilizaremos esta fórmula:

$$Rp = VPN \Big/ \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Contando con los siguientes Datos:

VPN =$136,516.8771

R_P=?

i=9% anual

n=(8años)*(12 meses)=96 meses

$$R_p = \frac{136{,}516.8771}{\frac{1-(1+0.0075)^{-96}}{0.0075}}$$

$$R_p = \frac{136{,}516.8771}{\frac{1-(1.0075)^{-96}}{0.0075}}$$

$$R_p = \frac{\frac{136{,}516.8771}{1}}{\frac{1-(1.0075)^{-96}}{0.0075}}$$

$$R_p = \frac{(136{,}516.8771)(0.0075)}{(1)(1-(1.0075)^{-96})}$$

$$R_p = \frac{(136{,}516.8771)(0.0075)}{0.511938289}$$

$$R_p = \frac{1{,}023.876578}{0.511938289}$$

$$\boldsymbol{R_P = \$2{,}000.00}$$

Para calcular el Número de Plazos, se utilizará la siguiente notación.

Para calcular el número de periodos de la Anualidad:

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{VPN * i/m}{R_p}\right)\right)}{Log(1+i/m)}$$

Contando con los siguientes Datos:

VPN =$136,516.8771

R_P=2,000

i=9% anual

n=?

Sustituyendo la Fórmula:

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{136{,}516.8771 * 0.0075}{2{,}000}\right)\right)}{Log(1+0.0075)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{1{,}023.876578}{2{,}000}\right)\right)}{Log\,(1+0.0075)}$$

$$-n = \frac{Log(1-(0.511938289))}{Log(1.0075)}$$

$$-n = \frac{Log(0.488061711)}{Log\,(1.0075)}$$

$$-n = \frac{-0.311525261}{0.003245054}$$

$$-n = -95.99999967$$

$$\boldsymbol{n = 96}$$

Tasa de Interés al Tanteo

La tasa de Interés al tanteo se calcula con una tabla proforma y un factor resultante.

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}} = VPN/Rp$$

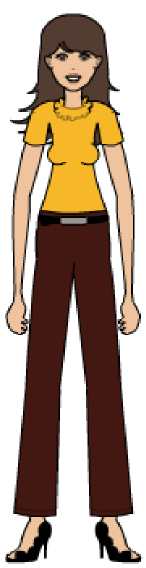
FACTOR RESULTANTE:

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}} = \frac{\$136{,}516.8771}{\$2{,}000.00}$$

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}} = 68.25843855$$

n	i	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	factor
96	0.01	0.38472297	61.52770299
	0.02	0.149411323	42.52943386
	0.03	0.05856342	31.38121934
	0.04	0.023163246	24.42091884
	0.05	0.009243305	19.8151339
	0.06	0.003720805	16.60465325
	0.07	0.001510627	14.2641339
	0.08	0.000618471	12.49226911
	0.09	0.000255303	11.10827441
AL TANTEO	0.0075	0.488061711	68.25843856

Problema 2:



Para calcular la Renta Periódica utilizaremos esta fórmula:

$$R_p = \frac{VPN}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Contando con los siguientes Datos:

VPN =$650,000
R_P=?
i=18% anual
n=(12años)*(12 meses)=144 meses

$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{\frac{1-(1+(0.18/12))^{-144}}{0.18/12}}$$

$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{\frac{1-(1.015)^{-144}}{0.015}}$$

$$R_p = \frac{\frac{\$650{,}000.00}{1}}{\frac{1-(1.015)^{-144}}{0.015}}$$

$$R_p = \frac{(\$650{,}000.00)(0.015)}{(1)(1-(1.015)^{-144})}$$

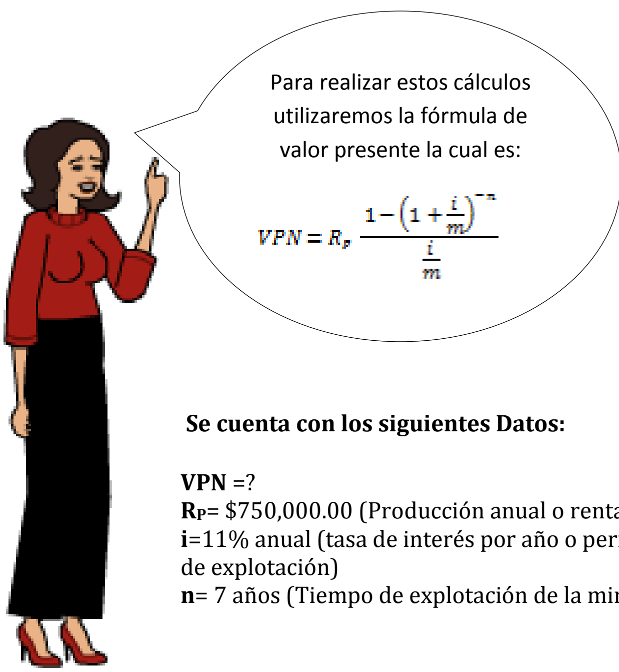
$$R_p = \frac{(\$650{,}000.00)(0.015)}{0.8828101722}$$

$$R_p = \frac{\$9{,}750.00}{0.8828101722}$$

$\boldsymbol{R_P}$ **=$11,044.27691**

La Sra. Aguilar recibirá $11,044.28 cada mes, durante 12 años, en lugar de $650,000 al contado.

Problema 3:



Se cuenta con los siguientes Datos:

VPN =?
R_P= $750,000.00 (Producción anual o renta)
i=11% anual (tasa de interés por año o periodo de explotación)
n= 7 años (Tiempo de explotación de la mina)

Solo es un ejemplo para razonar las fórmulas… …además, debemos entender que su capitalización es anual…

Es una anualidad simple, cierta, vencida e inmediata: Es **simple**, porque la producción es anual y la tasa de interés es anual, es **cierta** porque se conoce su duración o tiempo de explotación, es **vencida** porque se considera que la producción se determina al final de cada año, y es **inmediata**, porque la primera producción se recibirá en el primer periodo de explotación.

$$VPN = \$750{,}000.00\,\frac{1-(1+0.11)^{-7}}{0.11}$$

$$VPN = \$750{,}000.00\,\frac{1-0.48165841}{0.11}$$

$$VPN = \$750{,}000.00\,\frac{0.518341589}{0.11}$$

$$VPN = (\$750{,}000.00)(4.712196265)$$

El valor actual de la producción de la mina en los 7 años de explotación es de:

$$\mathbf{VPN = \$3{,}534{,}147.20}$$

Para calcular la Rp utilizaremos esta fórmula:

$$R_p = \frac{VPN}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$$

Contando con los siguientes Datos:

VPN =$3,534,147.20
R_P=?
i=11% anual
n= 7 años

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$R_p = \frac{\$3,534,147.20}{\frac{1-(1+0.11)^{-7}}{0.11}}$$

$$R_p = \frac{\$3,534,147.20}{\frac{1-(1.11)^{-7}}{0.11}}$$

$$R_p = \frac{\$3,534,147.20}{\frac{1-(0.48165841)}{0.11}}$$

$$R_p = \frac{\$3,534,147.20}{\frac{0.518341589}{0.11}}$$

$$R_p = \frac{\$3,534,147.20}{4.712196265}$$

$$R_p = \frac{\$3,534,147.20}{4.712196265}$$

$\boldsymbol{R_P}$ **=$750,000.00**

Para calcular el número de periodos de la Anualidad se debe utilizar la siguiente fórmula:

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{VPN * i/m}{R_p}\right)\right)}{Log(1+i/m)}$$

Sustituyendo la Formula:

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{\$3,534,147.20 * 0.11}{\$750,000.00}\right)\right)}{Log(1+0.11)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{\$388,756.192}{\$750,000.00}\right)\right)}{Log(1.11)}$$

$$-n = \frac{Log(1-(0.518341589))}{Log(1.11)}$$

$$-n = \frac{Log(0.48165841)}{Log(1.11)}$$

$$-n = \frac{-0.317260851}{0.045322978}$$

$$-n = -6.999999989$$

Contando con los siguientes Datos:

VPN ==$3,534,147.20
R_P= $750,000.00
i=11% anual

$$n = 7$$

La tasa de Interés se calcula al tanteo con una tabla proforma y un factor resultante.

FACTOR RESULTANTE:

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}} = \frac{\$3,534,147.20}{\$750,000.00}$$

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}} = 4.712196267$$

Mostrado en la Tabla Anexa.

n	i	$\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$	factor
7	0.01	0.932718055	6.728194529
	0.02	0.870560179	6.471991069
	0.03	0.813091511	6.230282955
	0.04	0.759917813	6.00205467
	0.05	0.71068133	5.786373397
	0.06	0.665057114	5.58238144
	0.07	0.622749742	5.389289402
	0.08	0.583490395	5.206370059
	0.09	0.547034245	5.032952835
AL TANTEO	0.11	0.481658411	4.712196265

Para calcular el valor futuro de la producción se debe ocupar la siguiente fórmula:

$$V_{F1} = R_P \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{\frac{i}{m}}$$

Contando con los siguientes Datos:
V_{F1} =?
R_P=$750,000.00
i=11% anual
n=7 años

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$V_{F1} = \$750,000.00 \frac{(1+0.11)^7 - 1}{0.11}$$

$$V_{F1} = \$750,000.00 \frac{(1+0.11)^7 - 1}{0.11}$$

$$V_{F1} = \$750,000.00 \frac{2.076160153 - 1}{0.11}$$

$$V_{F1} = (\$750,000.00)(9.783274117)$$

$$\boldsymbol{V_{F1} = \$7,337,455.59}$$

Al despejar la fórmula original para calcular la Renta Periódica queda de la siguiente forma:

$$Rp = \frac{VF}{\left[\frac{(1+{}^{i}/_{m})^n - 1}{i}\right]}$$

Contando con los siguientes Datos:

V_{F1} =$7,337,455.59
R_P=?
i=11% anual
n=7 años

Sustituyendo la Fórmula:

$$Rp = \frac{\$7,337,455.59}{\left[\frac{(1+0.11)^7 - 1}{0.11}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$7,337,455.59}{\left[\frac{(1.11)^7 - 1}{0.11}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$7,337,455.59}{\left[\frac{2.076160153 - 1}{0.11}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$7,337,455.59}{\left[\frac{1.076160153}{0.11}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$7,337,455.59}{9.783274117}$$

$$\boldsymbol{Rp = \$750,000.00}$$

Para calcular el número de periodos de la Anualidad Futura se utilizara:

$$n=\frac{\log\left|\left({}^{VF}/_{Rp}\right)*i\right|+1}{\log\left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

Contando con los siguientes Datos:

V_{F1} ==\$7,337,455.59

R_P= \$750,000.00

i=11% anual

n=?

Sustituyendo la Fórmula:

$$n=\frac{\log\left|\left(\$7{,}337{,}455.59/\$750{,}000.00\right)*0.11\right|+1}{\log(1+0.11)}$$

$$n=\frac{\log|(9.78327412)*0.11|+1}{\log(1.11)}$$

$$n=\frac{\log|(1.076160153)|+1}{\log(1.11)}$$

$$n=\frac{\log(2.076160153)}{\log(1.11)}$$

$$n=\frac{0.317260851}{0.045322978}$$

$$\boldsymbol{n=6.999999989\ =7}$$

Para calcular la tasa de Interés al tanteo se utiliza la siguiente fórmula:

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}={}^{VF}/_{Rp}$$

Contando con los siguientes Datos:

V_{F1} =\$7,337,455.59

R_P=\$750,000.00

Primero se debe sacar el Factor:

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}=\$7'337{,}455.59/\$750{,}000.00$$

$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}=\mathbf{9.78327412}$$

Mostrado en la Tabla Anexa.

n	i	$\frac{(1+\frac{i}{m})^{n}-1}{i}$
	0.01	7.213535211
7	0.02	7.434283382
	0.03	7.662462181
	0.04	7.898294481
	0.05	8.142008453
	0.06	8.39383765
	0.07	8.654021093
	0.08	8.92280336
	0.09	9.200434676
al tanteo	0.11	9.783274117

Problema 4:

En una tarde de diciembre, cercana a Navidad… Alfredo mientras descansaba pensaba en qué hacer con su aguinaldo.

A día siguiente Alfredo, comenzó a hacer cálculos, …………él quería liquidar su Automóvil….

Recapitulemos, el plazo del crédito del Automóvil es de 18 meses, con una tasa de interés del 4% mensual, y la mensualidad es de $10,000.00.

Para realizar el cálculo debemos traer a valor presente la deuda. Esto lo haremos con la fórmula de *VPN* de una anualidad vencida

Fórmula para el Valor presente de una Anualidad Ordinaria o Vencida es:

DATOS:

$$VPN = R_P \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}$$

VPN =?

R_P=$10,000.00

i=4% mensual

n=18 meses

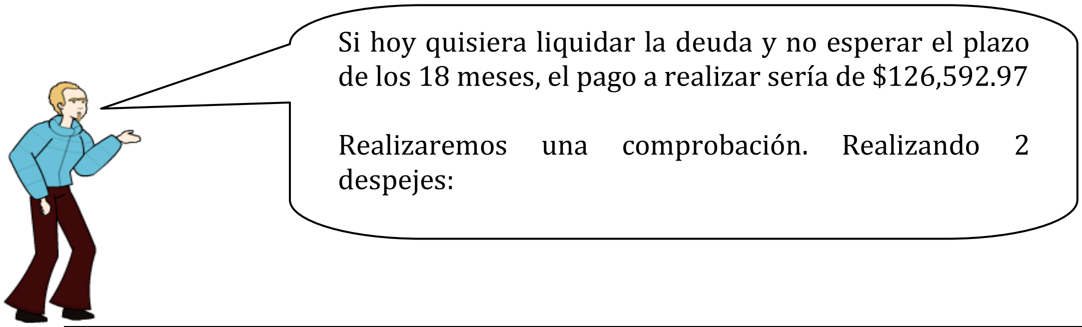
Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula, se obtiene:

$$VPN = \$10{,}000.00\frac{1-(1+0.04)^{-18}}{0.04}$$

$$VPN = \$10{,}000.00\frac{1-0.493628121}{0.04}$$

$$VPN = (\$10{,}000.00)(12.659297)$$

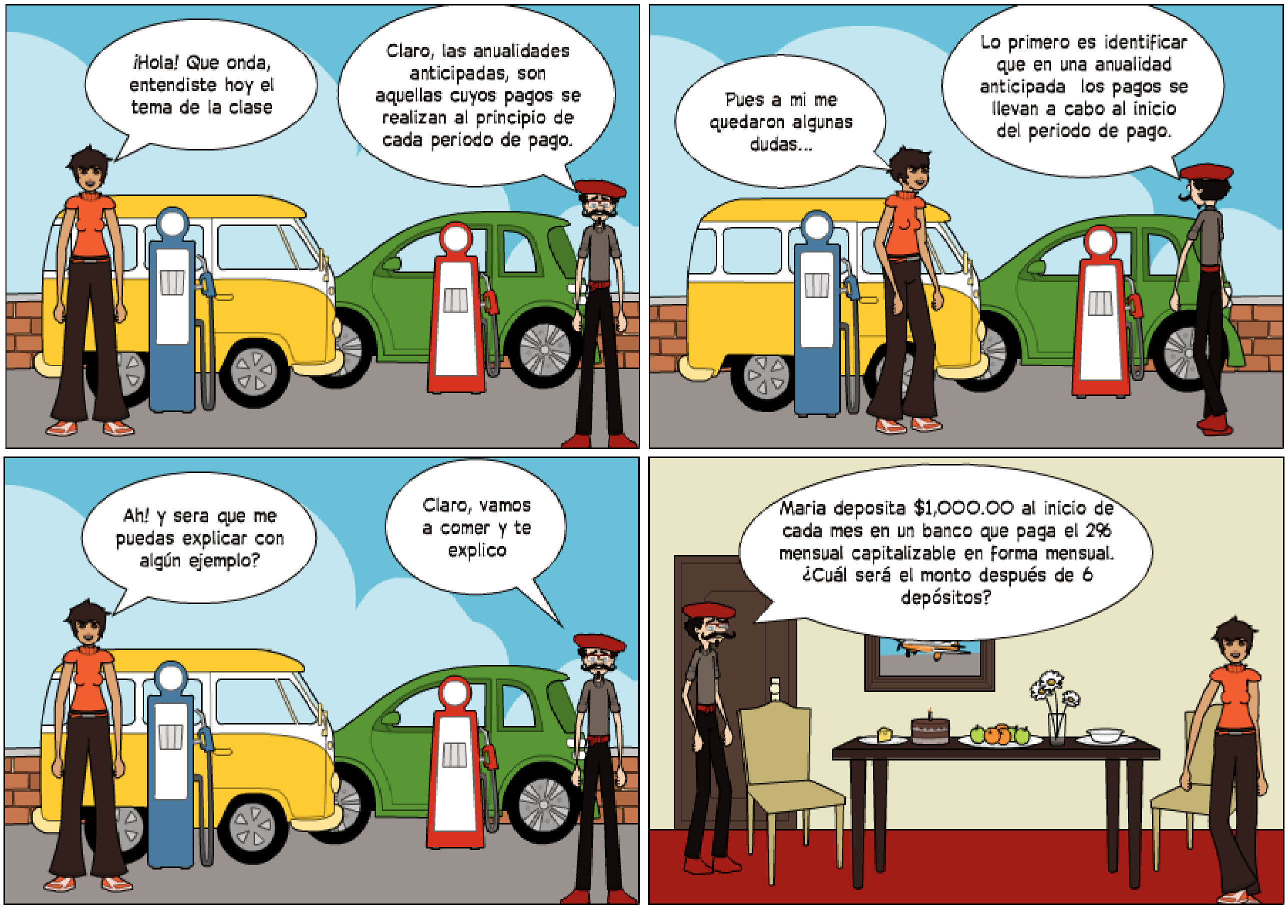
$$VPN = \$126{,}592.97$$



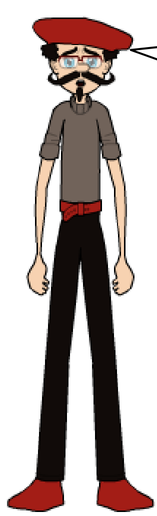
Anualidad o Renta Periódica	**Tiempo “n” en valor futuro**
Fórmula original $VPN = R_p \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}$ Al despejar: $R_p = \frac{VPN}{\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}}$ En donde : VPN=$126,592.97 R_p=? i=4% mensual n=18 meses $R_p = \frac{\$126{,}592.97}{\frac{1-(1+0.04)^{-18}}{0.04}}$ $R_p = \frac{\$126{,}592.97}{\frac{1-(1.04)^{-18}}{0.04}}$ $R_p = \frac{\frac{\$126{,}592.97}{1}}{\frac{1-(1.04)^{-18}}{0.04}}$ $R_p = \frac{(\$126{,}592.97)(0.04)}{(1)(1-(1.04)^{-18})}$ $R_p = \frac{(\$126{,}592.97)(0.04)}{0.506371879}$ $R_p = \frac{\$5{,}063.7188}{0.506371879}$ $\boldsymbol{R_p = \$10{,}000.00}$	Fórmula original $VPN = R_p \frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}$ Al despejar: $-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{NPV * i/m}{R_p}\right)\right)}{Log(1+i/m)}$ En donde : VPN=$126,592.97 R_p=$10,000.00 i=4% mensual n=? $-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{VPN * i}{Rp}\right)\right)}{Log(1+i)}$ $-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{126{,}592.97 * 0.04}{10{,}000}\right)\right)}{Log(1+0.04)}$ $-n = \frac{Log(1-(0.50637188))}{Log(1.04)}$ $-n = \frac{Log(0.49362812)}{Log(1.04)}$ $-n = -18.000000$ $\boldsymbol{n = -18}$

ANUALIDADES ANTICIPADAS

Problema 1:



Valor Futuro en Anualidades Anticipadas...



Identificando los datos y la fórmula, procederemos a la sustitución y resolución del problema.

Contando con los siguientes Datos:

VF=?
RP=$1,000.00
i=2% mensual
n=6

$$V_F = R_P(1+i)\,\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{i}$$

$$V_F = (\$1000.00)(1+0.02)\left(\frac{(1+0.02)^6 - 1}{0.02}\right)$$

$$V_F = (\$1000.00)(1.02)\left(\frac{(1.02)^6 - 1}{0.02}\right)$$

$$V_F = (\$1000.00)(1.02)\left(\frac{1.1261624193 - 1}{0.02}\right)$$

$$V_F = (\$1000.00)(1.02)\left(\frac{0.1261624193}{0.02}\right)$$

$$V_F = (\$1000.00)(1.02)(6.308120963)$$

$$V_F = \$6{,}434.283328$$

Ahora realizaremos los despejes correspondientes...

Calculo de la Renta Periódica:

Identificaremos que la fórmula a utilizar será la siguiente:

$$R_p = \frac{VF}{(1+i)\left[\frac{(1+i/m)^n - 1}{i/m}\right]}$$

Considerando los siguientes Datos:

$V_F = 6{,}434.283328$
R_p=?
i=2% mensual
n=6 meses

$$R_p = \frac{\$6{,}434.283328}{(1+0.02)\left[\frac{(1+0.02)^6-1}{0.02}\right]}$$

$$R_p = \frac{\$6{,}434.283328}{(1.02)\left[\frac{(1.02)^6-1}{0.02}\right]}$$

$$R_p = \frac{\$6{,}434.283328}{(1.02)\left[\frac{1.126162419-1}{0.02}\right]}$$

$$R_p = \frac{\$6{,}434.283328}{(1.02)\left[\frac{0.126162419}{0.02}\right]}$$

$$R_p = \frac{\$6{,}434.283328}{(1.02)[6.308120963]}$$

$$R_p = \frac{6{,}434.283328}{6.434283382}$$

$\boldsymbol{R_p}$ **=999.9999916=$1,000.00**

Calculo de la *"n"* (Número de plazos):

Para calcular el número de depósitos que tiene que hacer utilizaremos esta fórmula:

$$n = \frac{Log[\left|\left(\frac{VF}{R_p}\right)*\left(\frac{i}{m}\right)\right|] + 1)}{Log((1+i/m)(i/m))}$$

Si sustituimos los valores, nos quedarían los datos de la siguiente manera:

$V_F = \$6{,}434.283328$
R_p=$1,000.00
i=2% mensual
n=?

$$n = \frac{Log\left|\left(\frac{6{,}434.283328}{1{,}000.00}\right)*(0.02)\right|+1}{Log((1+0.02)(.02))}$$

$$n = \frac{Log|(6.43428332)*(0.02)|+1}{Log((1.02)(.02))}$$

$$n = \frac{Log|0.128685667|+1}{Log(1.0204)}$$

$$n = \frac{\log(1.128685667)}{\log(1.0204)}$$

$$n = \frac{0.05257301}{0.00877045}$$

$\boldsymbol{n = 5.99433441 = 6}$

Ver página 198

1.12868567	10	0.05257301	
1.0204	10	0.00877045	5.99433441

Calculo de la Tasa de Interés:

Y si quisieras conocer cuál es la tasa mensual que paga el banco, entonces desarrollaríamos esta fórmula:

$$(1+i)\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n-1}{i}=Vf/Rp$$

Para localizar el factor resultante de *Vf/Rp,* se calcula al tanteo con una tabla proforma:

Calcular i en Monto

MENU

n	*i*	factor 1	factor 2	$(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}$	
6	0.01	1.01	1.061520	6.152015	6.213535
	0.02	1.02	1.126162	6.308121	6.434283
	0.03	1.03	1.194052	6.468410	6.662462
	0.04	1.04	1.265319	6.632975	6.898294
	0.05	1.05	1.340096	6.801913	7.142008
	0.06	1.06	1.418519	6.975319	7.393838
	0.07	1.07	1.500730	7.153291	7.654021
	0.08	1.08	1.586874	7.335929	7.922803
	0.09	1.09	1.677100	7.523335	8.200435
al tanteo	**0.020000**	**1.020000**	**1.126162**	**6.308121**	**6.434283**

Notas:

Solo utilizar las celdas amarillas

$$S=R(1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}= \qquad (1+i)\frac{(1+i)^n-1}{i}=\frac{S}{R}$$

S	**$ 6,434.28**	***6.434280000***
R	**$ 1,000.00**	

TASA **6.434283382**

0.02000

Problema 2:

Utilizaremos la siguiente fórmula:

$$R_p = \frac{VPN}{(1 + i/m)\left[\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}\right]}$$

En donde:

VPN=$650,000.00
RP=?
i=11.55%anual (.1155/3=0.0385)
n=20

$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{(1+(0.1155/3))\left[\frac{1-(1+(0.1155/3))^{-20}}{0.1155/3}\right]}$$

$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{(1.0385)\left[\frac{1-(1.0385)^{-20}}{0.0385}\right]}$$

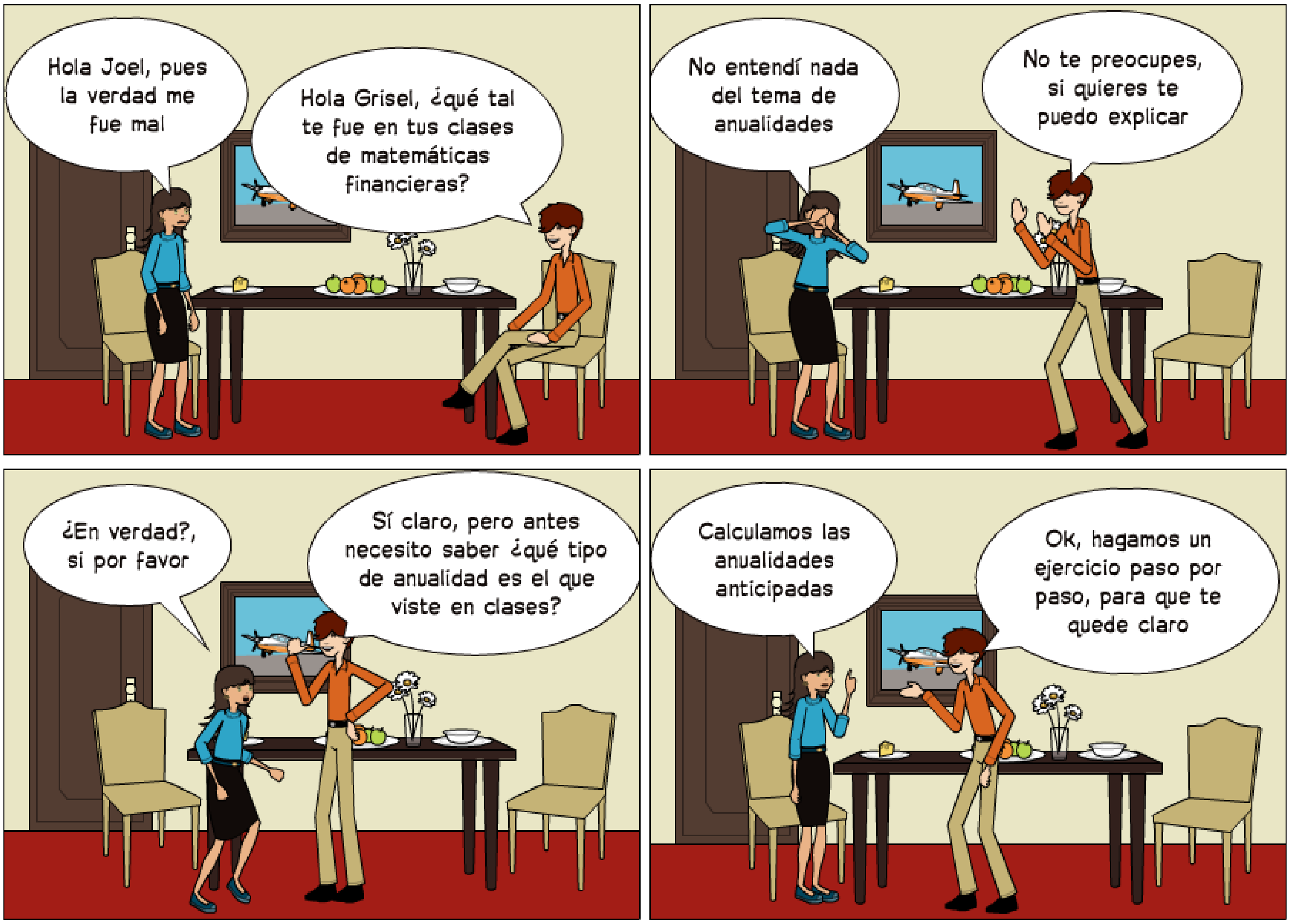
$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{(1.0385)\left[\frac{0.5302465454}{0.0385}\right]}$$

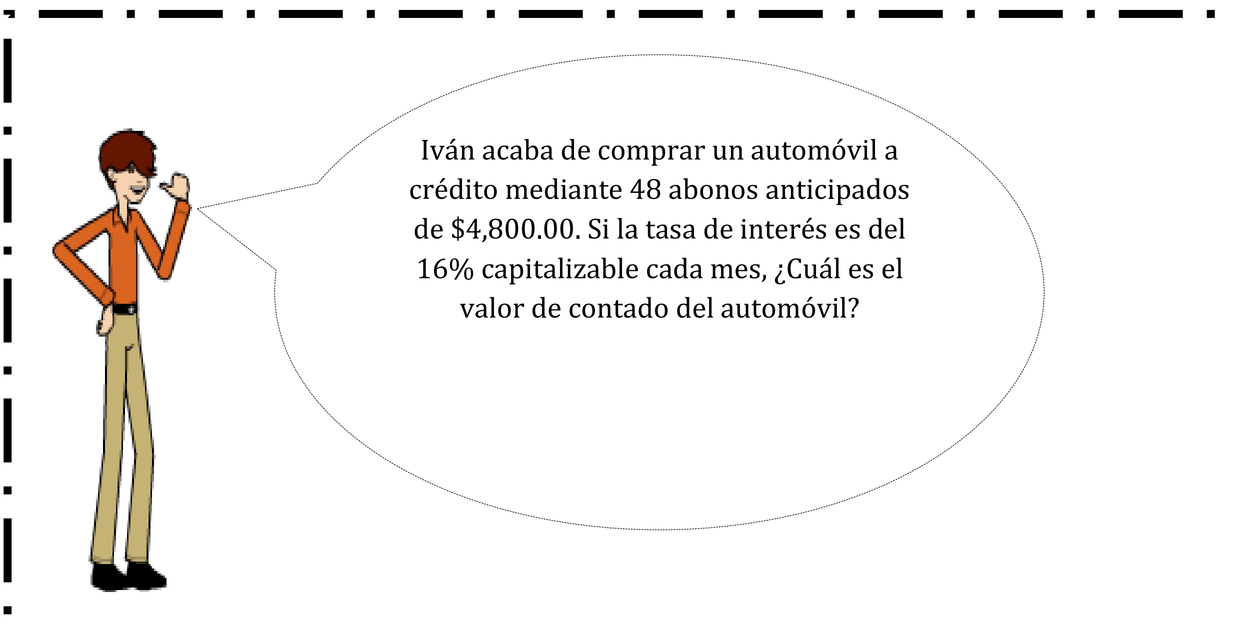
$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{(1.0385)[13.7726374]}$$

$$R_p = \frac{\$650{,}000.00}{14.30288409}$$

$$\boldsymbol{R_P = \$45{,}445.37982}$$

Problema 3:


Hola Joel, pues la verdad me fue mal
Hola Grisel, ¿qué tal te fue en tus clases de matemáticas financieras?
No entendí nada del tema de anualidades
No te preocupes, si quieres te puedo explicar
¿En verdad?, si por favor
Sí claro, pero antes necesito saber ¿qué tipo de anualidad es el que viste en clases?
Calculamos las anualidades anticipadas
Ok, hagamos un ejercicio paso por paso, para que te quede claro


Iván acaba de comprar un automóvil a crédito mediante 48 abonos anticipados de $4,800.00. Si la tasa de interés es del 16% capitalizable cada mes, ¿Cuál es el valor de contado del automóvil?

El valor de contado del automóvil es el valor presente de los abonos mensuales anticipados, por tanto:

$$VPN = R_p\left(1+\frac{i}{m}\right)\left[\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}\right]$$

Se pueden identificar los datos:
VPN=?
Rp= \$4,800.00
i=16%=0.16 capitalizable cada mes
(.16/12=0.0133333)
n= 48 abonos

Sustituyendo los datos en la fórmula quedara de la siguiente manera:

$$VPN = \$4{,}800.00\left(1+\frac{0.16}{12}\right)\left[\frac{1-\left(1+\frac{0.16}{12}\right)^{-48}}{\frac{0.16}{12}}\right]$$

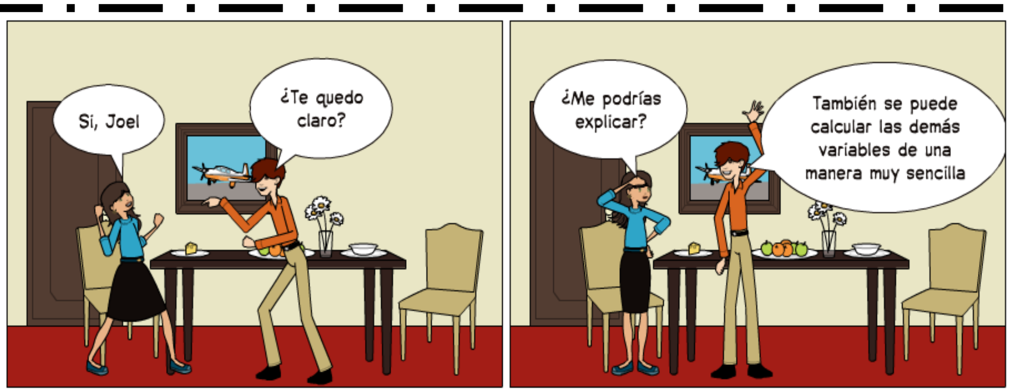
$$VPN = \$4{,}800.00(1.013333333)\left[\frac{1-(1.0133333)^{-48}}{0.013333333}\right]$$

$$VPN = \$4{,}800.00(1.013333333)\left[\frac{1-(0.529527127)}{0.013333333}\right]$$

$$VPN = \$4{,}864.00\left[\frac{0.470472873}{0.013333333}\right]$$

$$VPN = (\$4{,}864.00)(35.28546636)$$

$$\boldsymbol{VPN = \$171{,}628.51}$$



Para calcular la anualidad o Renta Periódica se utiliza la siguiente fórmula:

$$R_p = \frac{VPN}{(1+i/m)\left(\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}\right)}$$

Se pueden identificar los datos:
VPN=\$171,628.51
Rp=?
i=16%=0.16 capitalizable cada mes
(.16/12=0.0133333)

n= 48 abonos

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$R_p = \frac{\$171{,}628.51}{(1+0.16/12)\left(\frac{1-(1+0.16/12)^{-48}}{0.16/12}\right)}$$

$$R_p = \frac{\$171{,}628.51}{(1.013333333)\left(\frac{1-(1.013333333)^{-48}}{0.013333333}\right)}$$

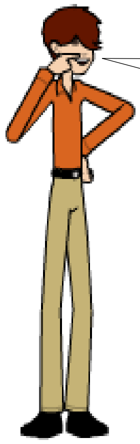
$$R_p = \frac{\$171{,}628.51}{(1.013333333)\left(\frac{1-(0.529527127)}{0.013333333}\right)}$$

$$R_p = \frac{\$171{,}628.51}{(1.013333333)\left(\frac{0.470472873}{0.013333333}\right)}$$

$$R_p = \frac{\$171{,}628.51}{(1.013333333)(35.28546635)}$$

$$R_p = \frac{\$171{,}628.51}{35.75593923}$$

$$\boldsymbol{R_p = \$4{,}800.00}$$



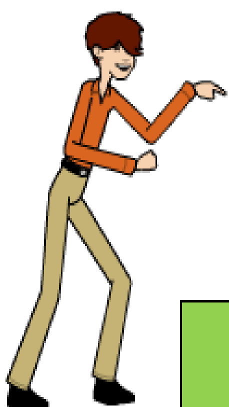
Y ahora, ¿cómo podemos calcular la tasa de interés "i"?

La tasa de Interés se calcula al tanteo con una tabla proforma y un factor resultante de dividir *VPN/Rp*.

FACTOR RESULTANTE:

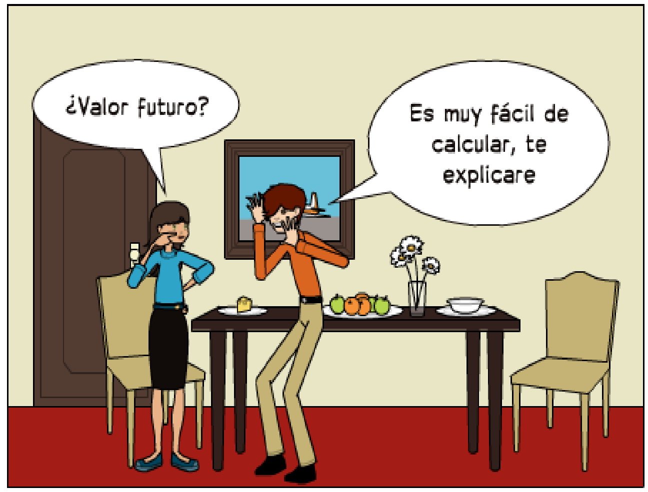
$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}=\frac{VPN}{Rp}=\frac{\$171{,}628.51}{\$4{,}800.00}$$

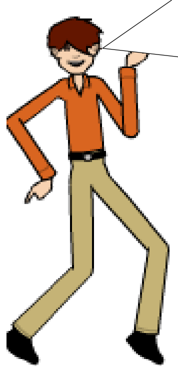
$$\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}}=35.75593958$$



Mostrado en la Tabla Anexa.

n	i	factor 1	factor 2	$(1+i)\left(\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}\right)$	
48	0.01	1.01	0.620260405	37.97395949	38.353699088
	0.02	1.02	0.386537609	30.67311957	31.286581963
	0.03	1.03	0.241998801	25.26670664	26.024707834
	0.04	1.04	0.152194765	21.19513088	22.042936117
	0.05	1.05	0.096142109	18.07715782	18.981015711
	0.06	1.06	0.060998403	15.65002661	16.589028208
	0.07	1.07	0.03886679	13.73047443	14.691607642
	0.08	1.08	0.024869081	12.18913649	13.164267407
	0.09	1.09	0.015978209	10.93357546	11.917597246
AL TANTEO	**0.013333**	**1.013333333**	**0.5295271353**	**35.28546573**	**35.755938599**





Para calcular el valor futuro del automóvil se debe ocupar la siguiente fórmula:

$$V_{F1} = R_p(1+\frac{i}{m})\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{\frac{i}{m}}$$

Se pueden identificar los datos:

VF$_1$=?
Rp=$4,800.00
i=16%=0.16/12=0.013333333 capitalizable cada mes
n=48 abonos

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$V_{F1} = \$4{,}800.00(1+0.0133333)\frac{(1+0.013333333)^{48}-1}{0.013333333}$$

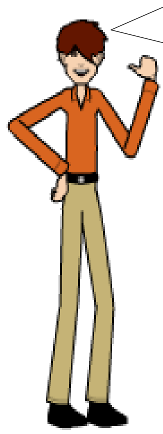
$$V_{F1} = \$4{,}800.00(1.013333333)\frac{(1.013333333)^{48}-1}{0.013333333}$$

$$V_{F1} = \$4{,}863.999998\,\frac{(1.888477377)-1}{0.013333333}$$

$$\$4{,}863.999998\frac{0.888477377}{0.013333333}$$

$$(\$4{,}863.999998)(66.63580494)$$

$$V_{F1} = \$324{,}116.56$$



Al despejar de la fórmula original para calcular la Renta Periódica queda de la siguiente forma:

$$Rp = \frac{VF}{(1+i)\left[\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{i}\right]}$$

Se pueden identificar los datos:

VF$_1$= $324,116.56
Rp=?
i=16%=0.16/12=0.013333333 capitalizable cada mes
n=48 abonos

Sustituyendo la Formula:

$$Rp = \frac{\$324{,}116.56}{(1+0.013333333)\left[\frac{(1+0.01333)^{48}-1}{0.013333333}\right]}$$

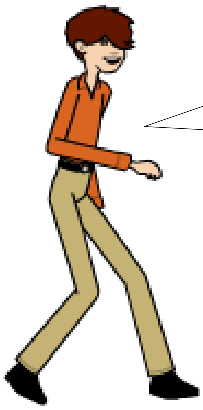
$$Rp = \frac{\$324{,}116.56}{(1.013333333)\left[\frac{(1.013333)^{48}-1}{0.013333333}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$324{,}116.56}{(1.013333333)\left[\frac{1.888477348-1}{0.013333333}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$324{,}116.56}{(1.013333333)\left[\frac{0.888477347}{0.013333333}\right]}$$

$$Rp = \frac{\$324{,}116.56}{67.52428009}$$

$$\boldsymbol{Rp = \$4{,}800.00}$$



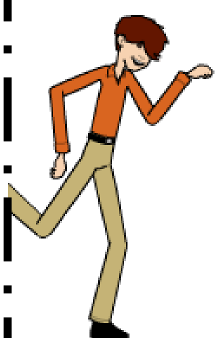
Para calcular la tasa de Interés al tanteo se utiliza la siguiente fórmula:

$$(1+i)\frac{(1+{}^{i}/_{m})^{n}-1}{{}^{i}/_{m}} = {}^{VF}/_{Rp}$$

Primero se debe calcular el Factor:

$$(1+i)\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n}-1}{i} = \frac{\$324{,}116.56}{\$4{,}800.00}$$

$$(1+i)\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n}-1}{i} = 67.52428333$$



Los datos son:

VF_1= \$324,116.56
Rp=\$4,800.00
i=?
n=48 abonos

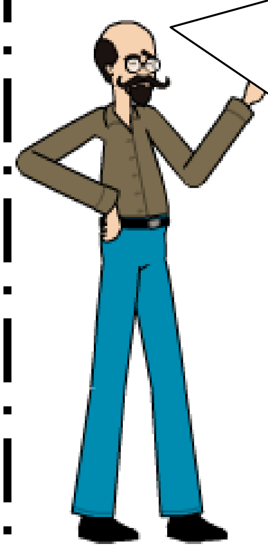
Tabla en Excel

n	i	factor 1	factor 2	$(1+i/m)$	$\dfrac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n}-1}{i/m}$
48	0.01	1.01	1.612226078	61.22260777	61.834833846
	0.02	1.02	2.587070385	79.35351927	80.940589660
	0.03	1.03	4.132251879	104.40839598	107.540647855
	0.04	1.04	6.570528242	139.26320604	144.833734286
	0.05	1.05	10.40126965	188.02539294	197.426662586
	0.06	1.06	16.39387173	256.56452882	271.958400550
	0.07	1.07	25.72890651	353.27009300	377.998999507
	0.08	1.08	40.21057314	490.13216428	529.342737422
	0.09	1.09	62.585237	684.28041107	745.865648072
AL TANTEO	**0.013333333**	**1.013333333**	**1.888477348**	**66.63580274**	**67.524280088**

Problema 4:

Don Pedro, salió como todas las mañanas a hacer su recorrido por la playa, y ahí se encontró a Juanito, un Joven que conoce desde pequeño….

Ya que encontró Don Pedro al Contador Martín, le comento sus dudas y él le explico…



Utilizaremos la fórmula de Valor Presente de una Anualidad Anticipada, para obtener el monto de la deuda al día de hoy.

La Fórmula es:

$$VPN = R_P\left(1+\frac{i}{m}\right)\left[\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}\right]$$

DATOS:
VPN =?
R_P=$8,950.00
i=7% mensual
n=12 meses

Sustituyendo los valores conocidos en la fórmula, se obtiene:

$$VPN = (\$8{,}950.00)(1+0.07)\left[\frac{1-(1+0.07)^{-12}}{0.07}\right]$$

$$VPN = (\$8{,}950.00)(1.07)\left[\frac{1-0.444011959}{0.07}\right]$$

$$VPN = (\$8{,}950.00)(1.07)(7.942686297)$$

$$VPN = \$76{,}063.13532$$

Si usted desea liquidar esta deuda, deberá pagar $76,063.1353, que es el importe del Valor Presente de la deuda sin considerar los intereses que aún no se devengan.

Comprobaremos este resultado, despejando de la fórmula de Valor Presente Neto, la variable *Rp* relativas al pago mensual.

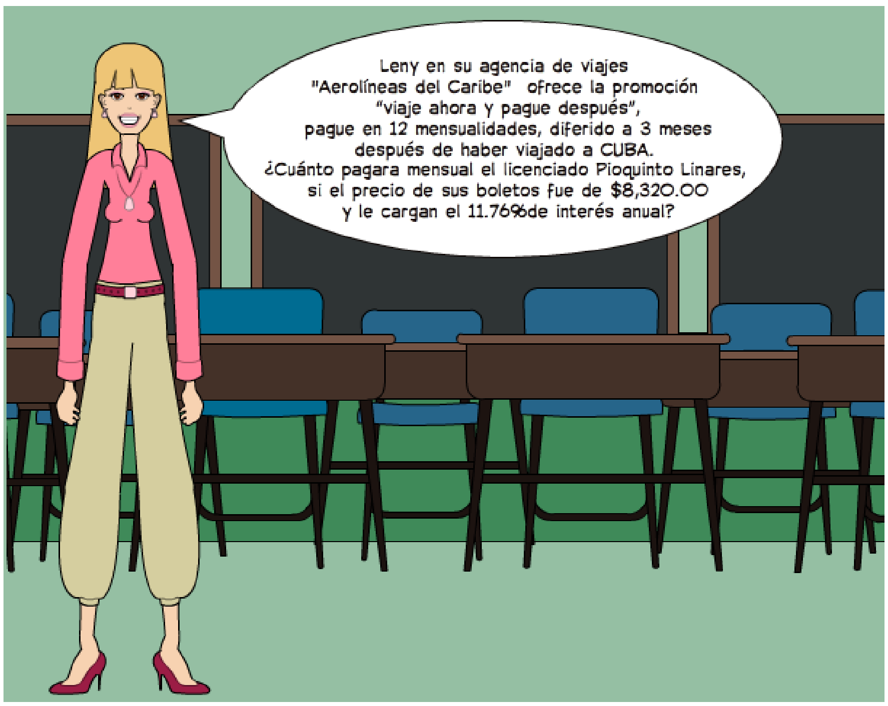
$$R_p = \frac{VPN}{(1+i/m)\left(\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}\right)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1-\left(\frac{NPV * i/m}{R_p}\right)\right)}{Log(1+i/m)(1+i/m)}$$

Anualidad o Renta Periódica
Fórmula original $VPN = R_p\left(1+\frac{i}{m}\right)\left[\frac{1-\left(1+\frac{i}{m}\right)^{-n}}{\frac{i}{m}}\right]$ Al despejar: $R_p = \frac{VPN}{(1+i/m)\left(\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m}\right)}$ En donde : VPN=\$76,063.13532 R_p=? i=7% mensual n=12 meses $R_p = \frac{\$76{,}063.13532}{(1+0.07)\left(\frac{1-(1+0.07)^{-12}}{0.07}\right)}$ $R_p = \frac{\$76{,}063.13532}{(1.07)\left(\frac{1-(1.07)^{-12}}{0.07}\right)}$ $R_p = \frac{\$76{,}063.13532}{(1.07)(7.942686297)}$ $R_p = \frac{\$76{,}063.13532}{8.498674337}$ $R_p = \$8{,}950.00$

ANUALIDADES DIFERIDAS

Problema 1:



Identificamos que el problema planteado es Valor Presente de Anualidad Diferida

Empezaremos por identificar los datos que tenemos y la formula que utilizaremos:

$$Rp=\frac{VPN}{\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{\dfrac{i}{m}(1+i/m)^{k-1}}}$$

Sustituiremos los datos en la fórmula:

$$Rp=\frac{\$8,320.00}{\dfrac{1-(1+.1176/12)^{-12}}{\dfrac{.1176}{12}(1+.1176/12)^{3-1}}}$$

Y los datos que nos arroja la situación planteada:

n = 12 mensualidades
k= 3 meses
VPN = $8,320.00
i= 11.76%
Rp =?

$$Rp=\frac{\$8,320}{\dfrac{1-(1.0098)^{-12}}{.0098(1.0098)^{2}}}$$

$$Rp=\frac{\$8,320}{\dfrac{.110439267}{.009993021192}}$$

$$Rp=\frac{\$8,320}{11.05163943}$$

$$Rp=\$752.8295$$

Valor Presente Neto:

Para calcular el valor presente utilizaremos

$$VPN=Rp\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m\left(1+i/m\right)^{k-1}}$$

DATOS:

n = 12 mensualidades
k= 3 meses
VPN = ?
i= 11.76%
Rp =$752.895

$$VPN=752.8295\frac{1-(1+.1176/12)^{-12}}{.1176/12\left(1+.1176/12\right)^{3-1}}$$

$$VPN=752.8295\frac{1-(1.0098)^{-12}}{.0098\left(1.0098\right)^{2}}$$

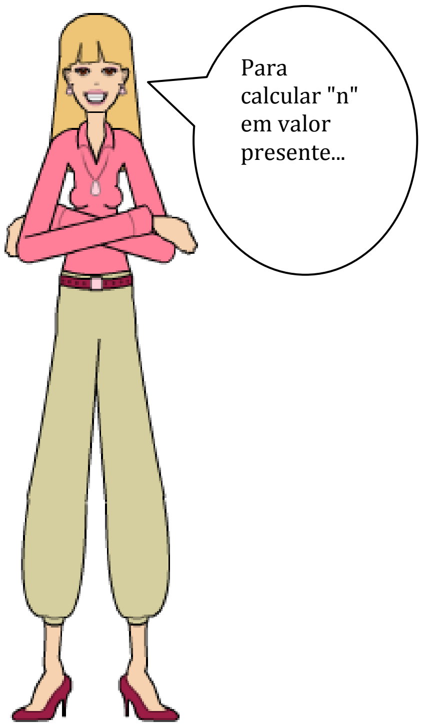
$$VPN=752.8295\frac{1-.889560732}{.0098\left(1.01969604\right)}$$

$$VPN=752.8295\frac{.110439268}{.009993021192}$$

$$VPN=752.8295(11.05163953)$$

$$VPN=\$8,320.00$$

Valor de "n" (número de periodos):



$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$8,320 * \left(\frac{.1176}{12}\right)\left(1 + \frac{.1176}{12}\right)^{3-1}}{\$752.8295}\right)}{Log\ \left(1 + \frac{.1176}{12}\right)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$8,320 * (0.0098)(1 + 0.0098)^{2}}{\$752.8295}\right)}{Log\ (1 + 0.0098)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$8,320 * (0.0098)(1.0098)^{2}}{\$752.895}\right)}{Log\ (1.0098)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{83.14193632}{752.895}\right)}{Log\ (1.0098)}$$

$$-n = \frac{Log(1 - 0.1104392646)}{Log\ (1.0098)}$$

$$-n = \frac{Log(0.8895607354)}{Log\ (1.0098)}$$

$$-n = \frac{-0.0508243948}{0.004235366359}$$

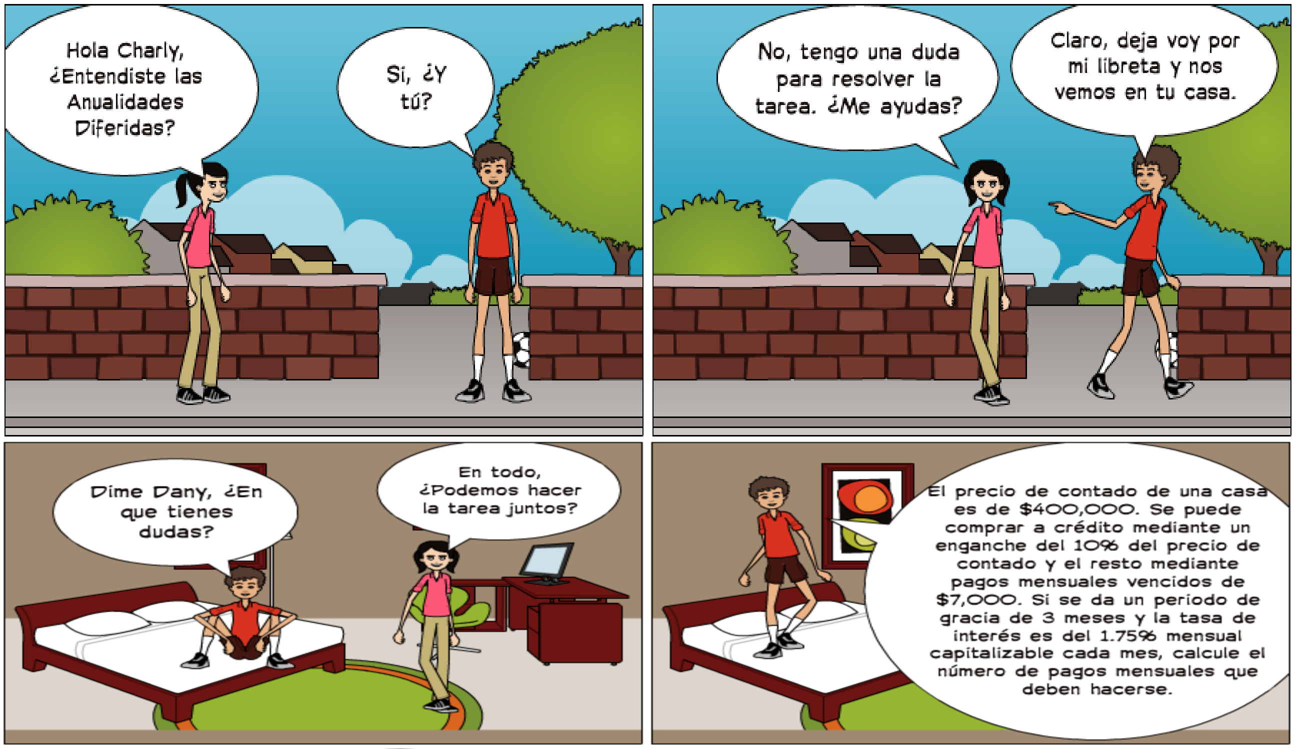
$$-n = -11.99999964$$

DATOS:
n = ?
k= 3 meses
VPN = 8,320.00
i= 11.76% (.1176/12=0.0098)
Rp =752.8295

Comprobación

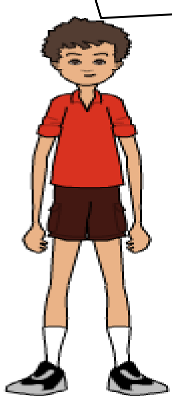
	log base 10		
0.88957034	10	-0.0508197	
1.0098	10	0.00423537	-11.9988922

Problema 2:



Para calcular "n" utilizaremos la siguiente fórmula:

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{VPN * \left(\frac{i}{m}\right)\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{k-1}}{Rp}\right)}{Log\left(1 + \frac{i}{m}\right)}$$



El enganche es de $40,000 y el saldo a financiar es de $360,000.

DATOS:

n = ?

VPN =$360,000.00

i= 1.75% mensual

Rp =$7,000.00

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$360{,}000 * (0.0175)(1 + 0.0175)^{3-1}}{\$7{,}000}\right)}{Log\ (1 + 0.0175)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$360{,}000 * (0.0175)(1 + 0.0175)^{2}}{\$7{,}000}\right)}{Log\ (1 + 0.0175)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$360{,}000 * (0.0175)(1.03530625)}{\$7{,}000}\right)}{Log\ (1.0175)}$$

$$-n = \frac{Log\left(1 - \frac{\$6{,}522.43}{7{,}000}\right)}{Log\ (1.0175)}$$

$$-n = \frac{Log(1 - 0.931775625)}{Log\ (1.0175)}$$

$$-n = \frac{Log(0.068224375)}{Log\ (1.0175)}$$

Logaritmo natural o base diez, es el mismo resultado

$$-n = \frac{-2.684953373}{0.017348638} \quad n = -154.76450$$

	log base 10		
0.06822439	10	-1.16606031	
1.0175	10	0.00753442	-154.764486

Problema 3:

El señor Romero le ha prometido a su hijo que dentro de 6 años que termine su carrera, el recibiría $120,000.00 Si la tasa de interés es del 18% nominal y la capitalización es anual, y el lapso de tiempo es de tres años: *¿Cuánto tendrá que depositar el día de hoy el señor Romero para lograr cumplir la promesa que le hizo a su hijo*?

Para calcular el valor presente en una anualidad diferida se ocupa la siguiente fórmula:

$$VPN = Rp\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m(1+i/m)^{k-1}}$$

En donde:
n = 3 años
k= 6 años
VPN =?
i=18 % anual capitalizable anualmente
Rp =$120,000.00

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$VPN = \$120{,}000.00\left[\frac{1-(1+0.18)^{-3}}{0.18(1+0.18)^{6-1}}\right]$$

$$VPN = \$120{,}000.00\left[\frac{1-(1.18)^{-3}}{0.18(1.18)^{5}}\right]$$

$$VPN = \$120{,}000.00\left[\frac{1-0.608630872}{(0.18)(2.287757757)}\right]$$

$$VPN = \$120{,}000.00\left[\frac{0.391369128}{0.411796396}\right]$$

$$VPN = (\$120{,}000.00)(0.950394737)$$

$$\boldsymbol{VPN = \$114,047.37}$$

Para calcular la Renta Periódica o mensualidad se ocupa la siguiente fórmula, la cual se despejo de la fórmula original:

$$Rp=\frac{VPN}{\dfrac{1-(1+i/m)^{-n}}{\dfrac{i}{m}(1+i/m)^{k-1}}}$$

Los datos que nos arroja la situación planteada:
n = 3 años
k= 6 años
VPN =$114,047.37
i=18 % anual
Rp =?

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$Rp=\left[\frac{\$114{,}047.37}{\dfrac{1-(1+0.18)^{-3}}{0.18(1+0.18)^{6-1}}}\right]$$

$$Rp=\left[\frac{\$114{,}047.37}{\dfrac{1-(1.18)^{-3}}{0.18(1.18)^{5}}}\right]$$

$$Rp=\left[\frac{\$114{,}047.37}{\dfrac{1-(0.608630872)}{(0.18)(2.287757757)}}\right]$$

$$Rp=\left[\frac{\$114{,}047.37}{\dfrac{0.391369128}{0.411796396}}\right]$$

$$Rp=\left[\frac{\$114{,}047.37}{0.950394737}\right]$$

$$\boldsymbol{Rp=\$120{,}000.00}$$

Para calcular el valor de "n" que es periodo o plazo se utiliza la siguiente fórmula:

$$-n=\frac{Log\left(1-\dfrac{VPN*\left(\frac{i}{m}\right)\left(1+\frac{i}{m}\right)^{k-1}}{Rp}\right)}{Log\ \left(1+\frac{i}{m}\right)}$$

Los datos que nos arroja la situación planteada:
n =?
k= 6 años
VPN =$114,047.37
i=18 % anual
Rp =$120,000.00

$$-n=\frac{Log\left(1-\dfrac{\$114{,}047.37*(0.18)(1+0.18)^{6-1}}{\$120{,}000.00}\right)}{Log\ (1+0.18)}$$

$$-n=\frac{Log\left(1-\dfrac{(20{,}528.5266)(2.287757757)}{\$120{,}000.00}\right)}{Log\ (1.18)}$$

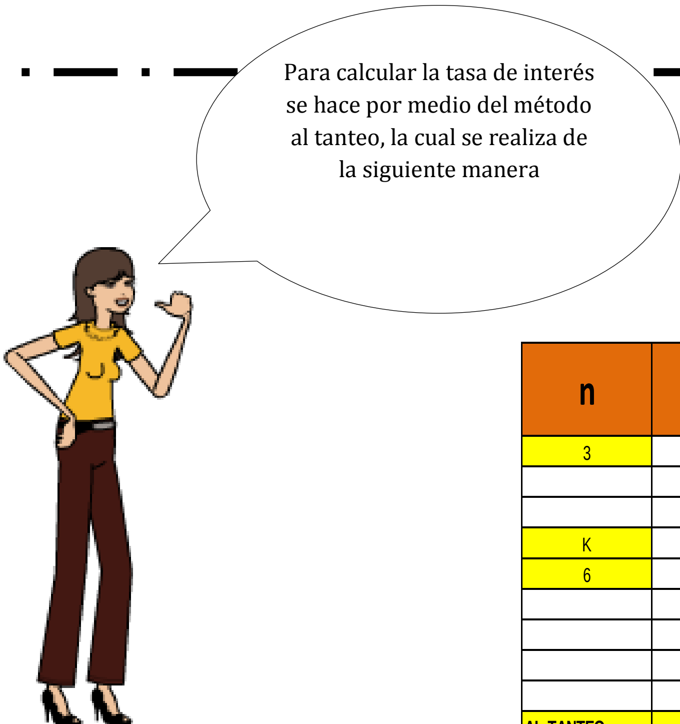
$$-n=\frac{Log\left(1-\dfrac{\$46{,}964.29597}{\$120{,}000.00}\right)}{Log\ (1.18)}$$

$$-n=\frac{Log(1-0.391369133)}{Log\ (1.18)}$$

$$-n=\frac{Log(0.608630867)}{Log\ (1.18)}$$

$$-n=\frac{-0.215646026}{0.071882007}$$

$$\boldsymbol{n=-3.00000069=3}$$



Se calcula el factor dividiendo VPN/Rp:

$$Factor = \frac{\$114{,}047.37}{\$120{,}000.00}$$

$$Factor = 0.95039475$$

n	i	factor 1	factor 2	$\frac{1-(1+i/m)^{-n}}{i/m(1+i/m)^{k-1}}$
3	0.01	0.029409852	0.01051	2.79825
	0.02	0.057677665	0.02208	2.61202
	0.03	0.084858341	0.03478	2.43999
K	0.04	0.111003641	0.04867	2.28092
6	0.05	0.136162401	0.06381	2.13374
	0.06	0.160380717	0.08029	1.99743
	0.07	0.183702123	0.09818	1.87110
	0.08	0.206167759	0.11755	1.75393
	0.09	0.22781652	0.13848	1.64517
AL TANTEO	**0.18**	0.391369127	0.41180	0.95039

La fórmula que utilizamos cuando se desea calcular el valor futuro es:

$$M = A\frac{(1+i/m)^n - 1}{i/m}$$

Conociendo los siguientes datos:
n = 3 años
k= 6 años (aquí no aplica el diferimiento, por eso se utiliza la fórmula de la anualidad ordinaria)
Vf = ?
i= 18% anual
A=$120,000.00

Sustituyendo los datos en la fórmula queda:

$$M = \$120{,}000.00\frac{(1+0.18)^3 - 1}{0.18}$$

$$M = \$120{,}000.00\frac{(1.18)^3 - 1}{0.18}$$

$$M = \$120{,}000.00\frac{1.643032 - 1}{0.18}$$

$$M = \$120{,}000.00\frac{0.643032}{0.18}$$

$$M = (\$120{,}000.00)(3.5724)$$

$$\mathbf{M = \$428{,}688.00}$$

Para calcular el valor de la tasa de interés se utiliza el método al tanteo, lo primero que hay que hacer es sacar el factor que se va a buscar en la tabla del método al tanteo, para calcular el factor se hace de la siguiente manera:

$$\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{i/m} = M/A$$

Calculo del factor:

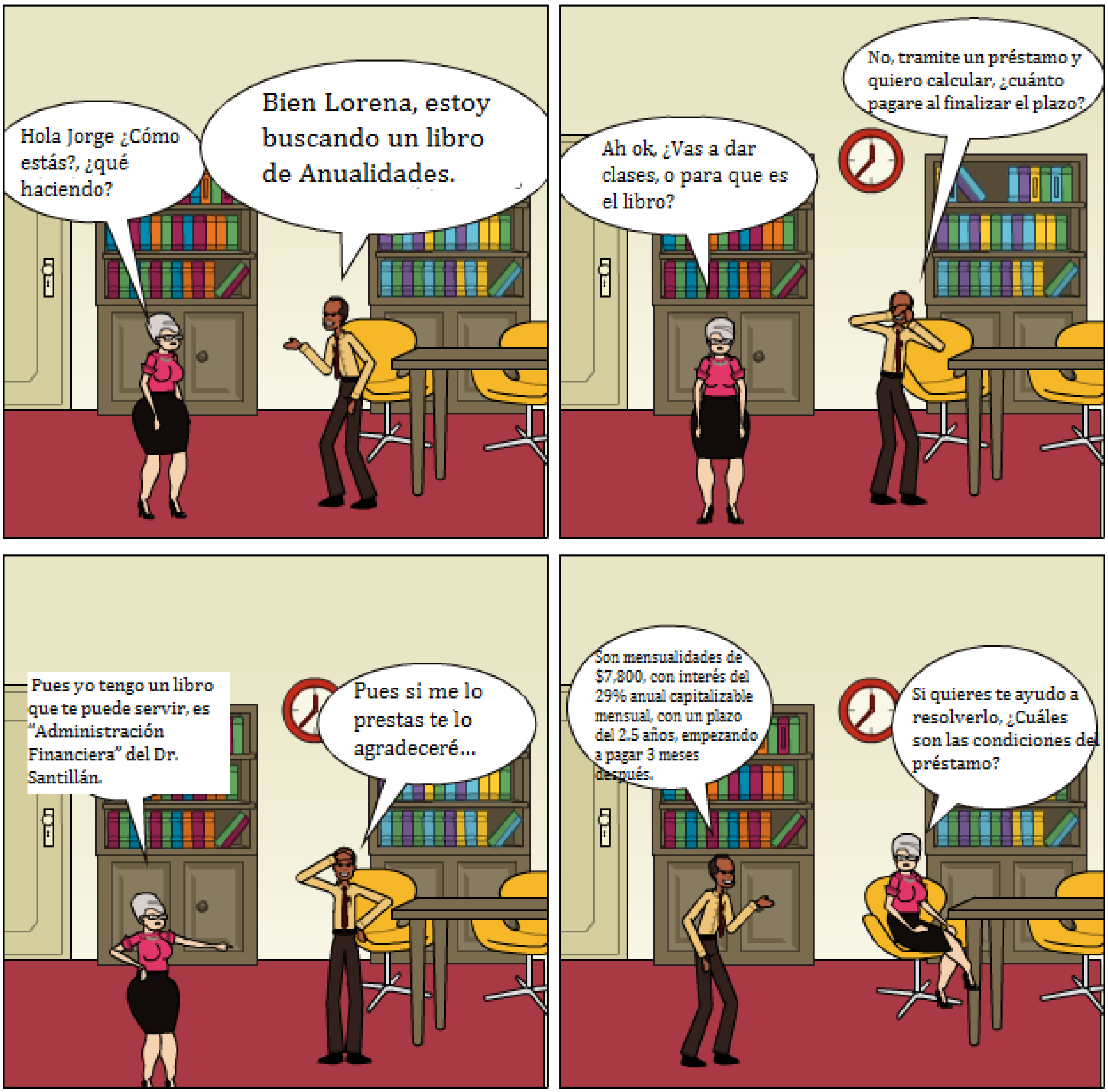
$$\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{i/m} = \$428{,}688.00/\$120{,}000.00$$

$$\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{i/m} = 3.5724$$

n	i	$\frac{(1+i/m)^n - 1}{i/m}$
3	0.01	3.0301
	0.02	3.0604
	0.03	3.0909
	0.04	3.1216
	0.05	3.1525
	0.06	3.1836
	0.07	3.2149
	0.08	3.2464
	0.09	3.2781
AL TANTEO	0.18	3.5724

Problema 4:

En la biblioteca de la escuela, Jorge estaba buscando un libro de anualidades…….. y aquí la historia



La fórmula que utilizamos cuando se desea calcular el valor futuro es:

$$M = A\frac{(1+i/m)^{n}-1}{i/m}$$

DATOS:
n =2.5años = 30 mensualidades
k= 3 meses (para calcular el VF en anualidad diferida, no afecta el diferimiento del plazo, utilizamos el formato de anualidad ordinaria)
Vf = ?
i= 29% cap. mensual
A=$7,800.00

Sustituyendo los valores:

$$M = 7{,}800\frac{(1+.29/12)^{30}-1}{.29/12}$$

$$M = 7{,}800\frac{(1.024166666)^{30}-1}{.024166666}$$

$$M = 7{,}800\frac{1.047005911}{.024166666}$$

$$M = 7{,}800(43.32438371)$$

$$M = \$337{,}930.1929$$

COMPROBACION:

Realizaremos un despeje para comprobar los datos:

Fórmula original

$$M = A\frac{(1+i/m)^n - 1}{i/m}$$

Al despejar:

$$A = \frac{M}{\left[\frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^n - 1}{i/m}\right]}$$

Anualidad o Renta Periódica
En donde :

n = 30 mensualidades

Vf = $337,930.1929

i= 29% cap. mensual

Rp=$7,800.00

$$A = \frac{\$337{,}930.1929}{\left[\frac{\left(1+\frac{0.29}{12}\right)^{30} - 1}{\left(\frac{0.29}{12}\right)}\right]}$$

$$A = \frac{\$337{,}930.1929}{\left[\frac{(1+0.024166666)^{30} - 1}{(0.024166666)}\right]}$$

$$A = \frac{\$337{,}930.1929}{\left[\frac{(1.024166666)^{30} - 1}{(0.024166666)}\right]}$$

$$A = \frac{\$337{,}930.1929}{\left[\frac{2.047005911 - 1}{0.024166666}\right]}$$

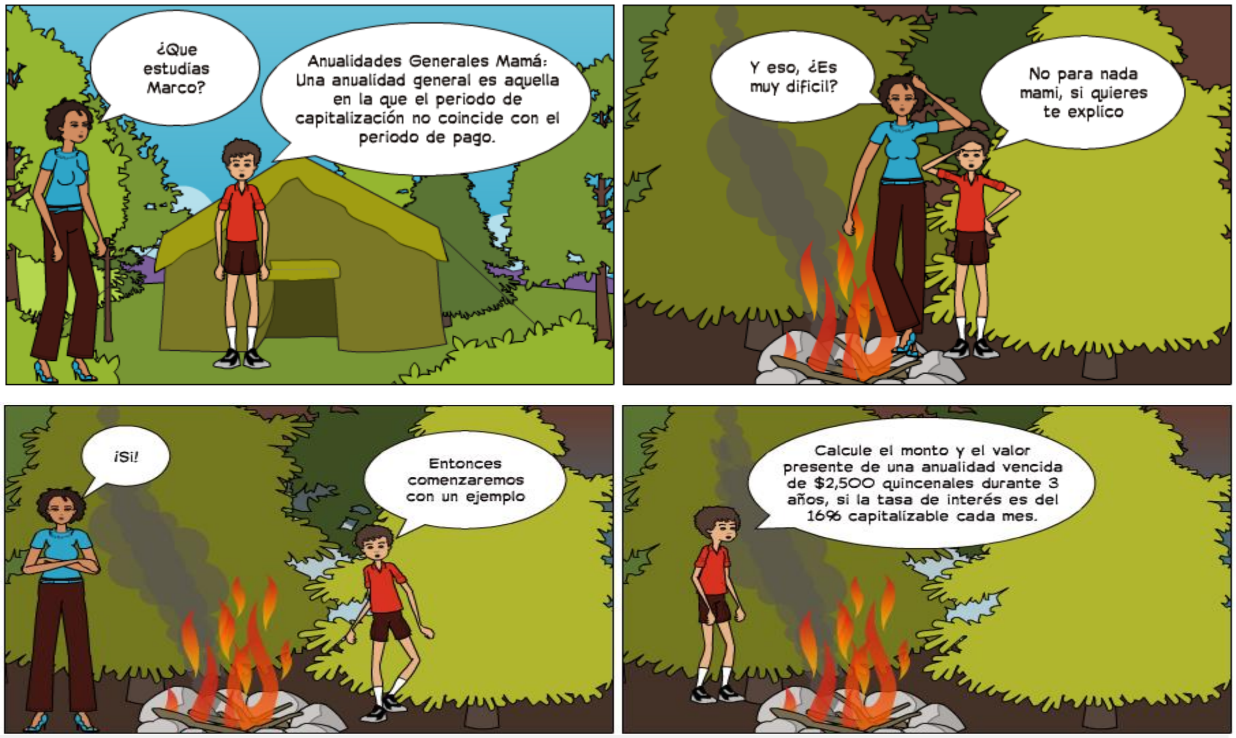
$$A = \frac{337{,}930.1929}{\left[\frac{1.047005911}{(0.024166666)}\right]}$$

$$A = \frac{337{,}930.1929}{43.32438371}$$

$$\boldsymbol{A = \$7,800.00}$$

ANUALIDADES GENERALES

Problema 1:



NOTA: El periodo de pago es quincenal, en tanto que el periodo de capitalización es mensual, por lo que se requiere calcular una tasa equivalente quincenal. Si la tasa original es del 16% nominal capitalizable mensualmente, primeramente se sugiere calcular la tasa efectiva y luego identificar una tasa equivalente cuyo periodo de capitalización sea quincenal, con el fin de que coincida con el periodo de pago.

Primero iniciaremos calculando la Tasa Efectiva del 16%

$$TE = \left[\left(1 + \frac{.16}{360} * 30\right)^{12} - 1\right] * -100$$

Sustituyendo valores:

$$TE = \left[\left(1 + \frac{.16}{360} * 30\right)^{12} - 1\right] * -100$$

$$TE = [(1.0133333)^{12} - 1] * -100$$

$$TE = [(1.172270798) \quad -1] * -100$$

$$TE = 17.227\%$$

Anual capitalizable cada quincena.

La tasa efectiva del 17.227 anual entre 24 quincenas nos daría 0.007177917*100=0.717791667%

Una vez obtenida la tasa equivalente el problema deja de ser una anualidad general para convertirse en una anualidad simple vencida.

Ahora lo desarrollaremos como una Anualidad Simple

Colocamos los Datos:
M=?
A=$2,500.00
$\bar{\imath}$=0.007177917 quincenal
n=36 meses =72 quincenas

Obtenemos el Valor Futuro o Monto:

$$M = A\left[\frac{\left(1+\frac{\bar{\imath}}{m}\right)^{n}-1}{\bar{\imath}/m}\right]$$

$$M = \$2{,}500.00\left[\frac{(1+0.007177917)^{72}-1}{(0.007177917)}\right]$$

$$M = \$2{,}500.00\left[\frac{(1.007177917)^{72}-1}{(0.007177917)}\right]$$

$$M = \$2{,}500.00\left[\frac{(1.673578283)\quad -1}{(0.007177917)}\right]$$

$$M = \$2{,}500.00\left[\frac{(673578283}{(0.007177917)}\right]$$

$$M = \$2{,}500.00(93.84035553)$$

$$\boldsymbol{M = \$234,600.89}$$

Ahora calcularemos el Valor presente neto del conjunto de cuotas periódicas, a partir de esta fórmula:

$$VPN = Rp\frac{1-\left(1+\bar{\imath}/m\right)^{-n}}{\bar{\imath}}$$

Colocamos los Datos:

VPN=?

Rp=$2,500.00

i= 0.007177917 *quincenal*

n=36 meses=72 quincenas

$$VPN = \$2{,}500.00\frac{1-(1+0.007177917)^{-72}}{0.007177917}$$

$$VPN = \$2{,}500.00\frac{1-(1.007177917)^{-72}}{0.007177917}$$

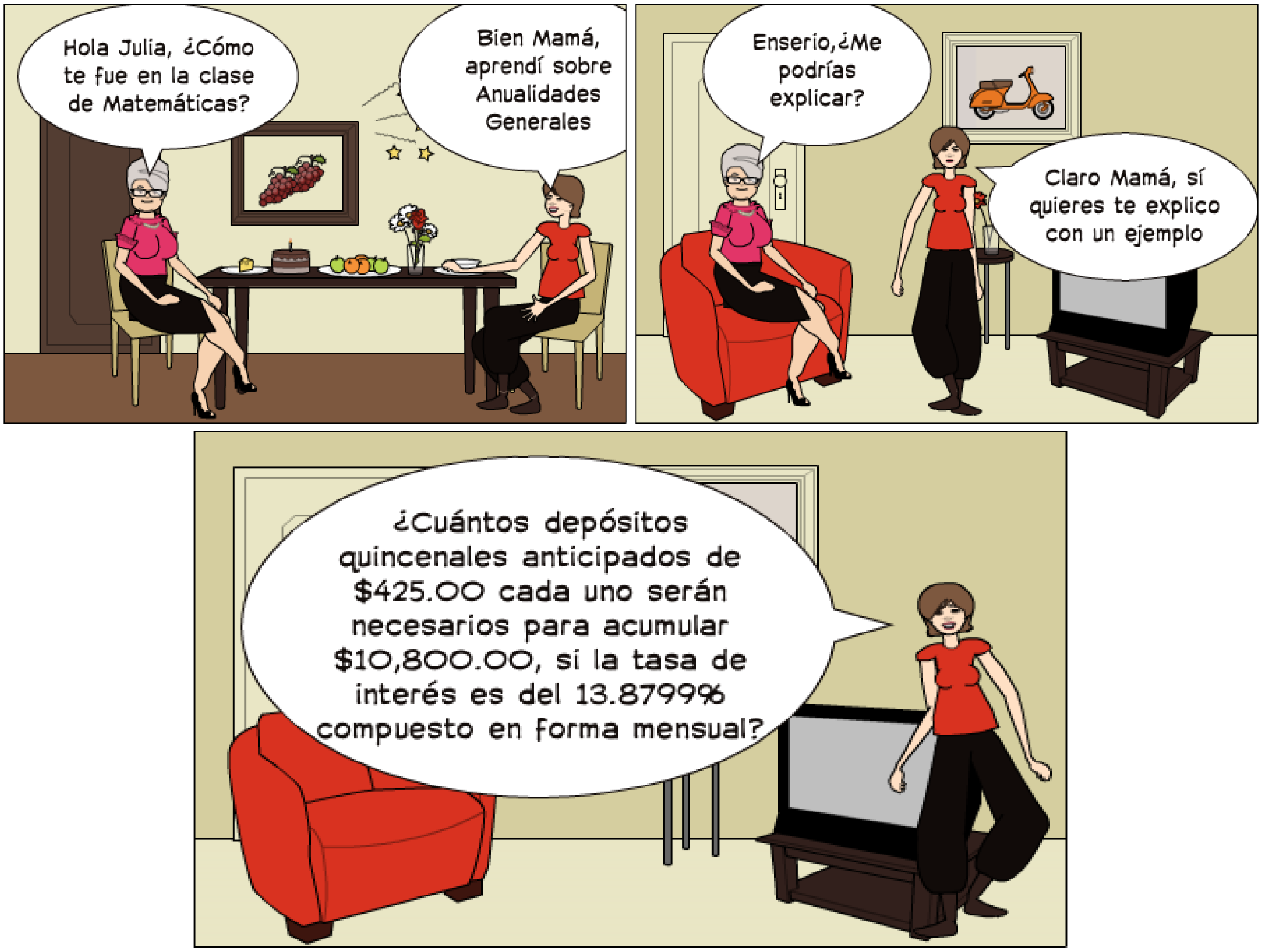
$$VPN = \$2{,}500.00\frac{1-(0.59752208)}{0.007177917}$$

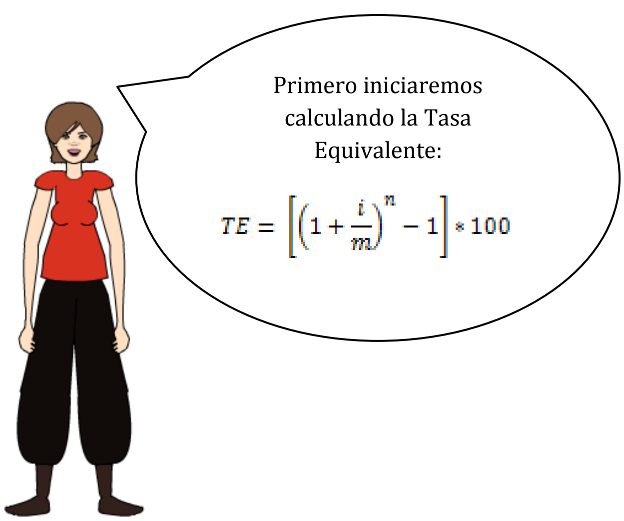
$$VPN = \$2{,}500.00\frac{0.40247792}{0.007177917}$$

$$VPN = \$2{,}500.00\,(56.07168765)$$

$$\boldsymbol{VPN = \$140,179.22}$$

Problema 2:





Sustituyendo valores:

$$TE = \left[(1+\frac{i}{m})^{n} - 1\right]*100$$

$$TE = \left[(1+\frac{0.138799}{12})^{12} - 1\right]*100$$

$$TE = \left[(1.011566583)^{12} - 1\right]*100$$

$$TE = \left[(1.147978326) - 1\right]*100 = 14.79783255\%$$

La–tasa–quincenal–sería–entonces–la–siguiente:

$$i_e = (\frac{.1479783255}{360} * 15 = 0.006165764 = 0.616576356\%$$

Una vez obtenida la tasa equivalente el problema deja de ser una anualidad general para convertirse en una anualidad anticipada simple.

De la formula para calcular el número de depósitos que tiene que realizar, en ordinaria vencida tenemos que:

$$n = \frac{Ln\left[(VF / Rp) * i / m\right] + 1}{Ln(1 + i / m)}$$

En anticipada

$$n = \frac{Ln\left[(VF / Rp) * (i / m)(1 + i / m)\right] + 1}{Ln(1 + i / m)}$$

Si sustituimos los valores, nos quedarían los datos de esta manera:

$V_F = 10,800.00$
R_p=425.00
i=0.6165764% quincenal, en decimal es: 0.006165764
n=?

$$n = \frac{Ln\left[(VF / Rp) * i / m\right] + 1}{Ln(1 + i / m)}$$

$$n = \frac{Ln\left[(\$10,800.00 / \$425.00) * 0.006165764\right] + 1}{Ln(1.006165764)}$$

$$n = \frac{Ln\left[(25.41176471) * 0.006165764\right] + 1}{Ln(1.006165764)}$$

$$n = \frac{Ln[1.156682944]}{Ln(1.006165764)} = \frac{0.145556378}{0.006146833} = 23.67989792$$

Comprobación

$$VF = Rp_1 \left[\frac{(1 + i / m)^n - 1}{(i / m)} \right]$$

$$Vf = \$425.00 \left[\frac{(1.006165764)^{23.67989792} - 1}{0.006165764} \right]$$

$$Vf = \$425.00 \left[\frac{.156682957}{0.006165764} \right]$$

$$Vf = \$425.00 [25.41176681]$$

$$Vf = \$10,800.00$$

Anualidad Anticipada

$$n = \frac{Ln\left[(VF / Rp) * (i / m)(1 + i / m)\right] + 1}{Ln(1 + i / m)}$$

$$n = \frac{Ln\left[(\$10,800.00 / \$425.00) * (0.006165764)(1.006165764)\right] + 1}{Ln(1.006165764)}$$

$$n = \frac{Ln\left[(25.41176471) * 0.006203781\right] + 1}{Ln(1.006165764)}$$

$$n = \frac{Ln[1.157649023]}{Ln(1.006165764)} = \frac{0.146391244}{0.006146833} = 23.81571844$$

$$VF = Rp_1 (1.006165764) \left[\frac{(1.006165764)^{23.81572892} - 1}{(0.006165764)} \right]$$

$$Vf = \$425.00(1.006165764) \left[\frac{(1.15764911) - 1}{0.006165764} \right]$$

$$Vf = \$425.00(1.006165764)[25.56846317]$$

$$Vf = \$425.00 [25.72611228]$$

$$Vf = \$10,933.59$$

Hay un ajuste en la anticipada, ya que genera interés a partir del primer día

Problema 3:

Gloria es una gran vendedora de cosmeticos por catalogo, por lo cual su jefe a tomando en consideración su desempeño y ha decidido otorgarle a gloria un incentivo bimestral de $750.00. A partir de esto Gloria ha tomado la decisión de abrir su propia cuenta de ahorros, en la cual le ofrecen una tasa de interés del 3% mensual capitalizable mensualmente, ella esta consciente que debe incrementar el saldo de la misma, con una cantidad similar a la que depositó inicialmente, sabe que no podra retirar nada de su dinero de esa cuenta al menos durante el primer año, entoces, ¿Cuánto acumulará Gloria al cabo de 5 años siguiendo este esquema de ahorro?

Primero lo que debemos hacer es identificar la tasa equivalente a la tasa capitalizable que ofrece la cuenta de ahorros, esto quiere decir, por ejemplo en el ejercicio nos dan una tasa mensual de 3% mensual con capitalización igual, entonces debemos calcular una tasa bimestral que sea equivalente.

Para ello tomamos la siguiente fórmula:

$$TE = \left[\left(1+\frac{i}{m}\right)^{n} - 1\right] * 100$$

$$TE = [(1.03)^{2} - 1] * 100$$

$$\boldsymbol{TE} = \mathbf{6.09\ bimestral}$$

Entonces:

$TE = (1.03)^{2} = 1.0609$, es la tasa bimestral equivalente a la tasa del 3% mensual.

Ahora para poder calcular el monto que tendrá gloria dentro de 3 años se ocupa la siguiente fórmula:

$$M = A\left[\frac{\left(1+\frac{\bar{\imath}}{m}\right)^{n} - 1}{\bar{\imath}/m}\right]$$

Se cuenta con estos datos:
M=?
A=$750.00 (depósitos bimestrales)
$\bar{\imath}$=1.0609 es la tasa equivalente
n= 5 años= 12+5/2=30 meses

Sustituyendo los datos en la fórmula:

$$M = \$750.00\left[\frac{(1.0609)^{(12*\frac{5}{2})30} - 1}{1.0609}\right]$$

$$M = \$750.00\left[\frac{(5.891603104) - 1}{1.0609}\right]$$

$$M = \$750.00\left[\frac{4.891603104}{1.0609}\right]$$

$$M = \$750.00(4{,}610805075)$$

$$\boldsymbol{M = \$3{,}458.10}$$

Para comprobar que el resultado sea correcto, se sugiere realizar algunos despejes:

Las otras variables deben coincidir con los proporcionados originalmente en el ejercicio.

Así que, calcularemos al menos *Rp* y *n*

TABLA DE DESPEJES

Anualidad o Renta Periódica *"Rp"*

$$A = \frac{M}{\left[\frac{\left(1+\frac{\bar{\imath}}{m}\right)^{n}-1}{\bar{\imath}/m}\right]}$$

En donde :

M=$3,458.10
A=?
ī=1.0609
n=30 meses

$$A = \frac{\$3,458.10}{\left[\frac{(1.0609)^{30}-1}{(1.0609)}\right]}$$

$$A = \frac{\$3,458.10}{\left[\frac{5.891603104-1}{(1.0609)}\right]}$$

$$A = \frac{\$3,458.10}{\left[\frac{4.891603104}{(1.0609)}\right]}$$

$$A = \frac{\$3,458.10}{4.610805075}$$

***A* =$749.9991745= $750.00**

Tiempo "n" en valor futuro

$$n = \frac{Log\left|\left(\frac{M}{A}\right)*\bar{\imath}\right|+1}{Log\,(1+\frac{\bar{\imath}}{m})}$$

En donde :

M=$3,458.10
A=$750.00
ī=1.0609
n=?

$$n = \frac{Log\left|\left(\frac{\$3,458.10}{750.00}\right)*1.0609\right|+1}{Log\,(1.0609)}$$

$$n = \frac{Log\left|(4.6108)*1.0609\right|+1}{Log\,(1.0609)}$$

$$n = \frac{Log\left|4.89159772\right|+1}{Log\,(1.0609)}$$

$$n = \frac{Log\,(5.89159772)}{Log\,(1.0609)}$$

$$n = \frac{0.770233085}{0.025674449}$$

$$\boldsymbol{n = 29.99998453\ = 30\ meses}$$

	log base 10		
5.89159772	10	0.77023309	
1.0609	10	0.02567445	29.9999845

Fin del Capitulo:

Sugerencias o comentarios

Enviar correo a: agsposgrados@yahoo.com,

arturogarciasantillan@yahoo.com.mx